

A U T O R E S   C O O R D I N A D O R E S

JOSÉ SOLORZANO MOVILLA • BERTHA HERNÁNDEZ CONTRERAS • ANDRÉS PORTO SOLANO



# EL MODELAMIENTO MATEMÁTICO

como elemento transversal  
en el programa de

# INGENIERÍA DE SISTEMAS



**SELLO EDITORIAL**  
CORUNIAMERICANA



# **EL MODELAMIENTO MATEMÁTICO COMO ELEMENTO TRANSVERSAL EN EL PROGRAMA DE INGENIERÍA DE SISTEMAS**

## **Autores Coordinadores:**

José Solorzano Movilla  
Bertha Hernández Contreras  
Andrés Porto Solano

## **Autores**

José Solórzano Movilla  
Bertha Hernández Contreras  
Andrés Porto Solano  
Shirley Sarmiento  
Horacio Caicedo  
Clara Colón López  
Melissa Castañeda,  
Claudia Orozco,  
Nelson Tarazona Mendez,  
Alexander Salas Moreno,  
José Carmona,  
Martha Olaciregui Leemow,  
René Ramírez Fernández,  
Ilma Bonilla Botía,  
Selene Coelho Loibel,  
Diana Suárez López

Libro resultado de investigación, realizado a partir del trabajo colaborativo entre grupos de investigación y el desarrollo de propuestas que contribuyen al fortalecimiento de los indicadores de generación de nuevo conocimiento en el área del Ingeniería.

El modelamiento matemático como elemento transversal en el programa de Ingeniería / Shirley Sarmiento ... [et. al.]. – Barranquilla : Corporación Universitaria Americana, 2018.

100 p. ; 17x24 cm.  
ISBN: 978-958-5512-23-8

1. Modelos matemáticos -- Ingeniería de sistemas. -- Corporación Universitaria Americana. I. Sarmiento, Shirley. II. Caicedo, Horacio. III. Colón López, Clara. IV. Solórzano Movilla, José. V. Castañeda, Melissa. VI. Orozco, Claudia. VII. Hernández Contreras, Bertha. VIII. Tarazona Méndez, Nelson. IX. Salas Moreno, Alexander. X. Carmona, José. XI. Olaciregui Leemow, Martha Patricia. XII. Ramírez Fernández, René. XIII. Bonilla Botía, Ilma Azucena. XIV. Coelho Loibel, Selene. XV. Suárez López, Diana.

003.3 M689 2018 cd 21 ed.  
Corporación Universitaria Americana-Sistema de Bibliotecas

### **Corporación Universitaria Americana©**

Sello Editorial Coruniamericana©

ISBN: 978-958-5512-23-8

## **EL MODELAMIENTO MATEMÁTICO COMO ELEMENTO TRANSVERSAL EN EL PROGRAMA DE INGENIERÍA DE SISTEMAS**

Autor Coordinador:

© **José Solorzano Movilla**, © **Bertha Hernández Contreras**, © **Andres Porto Solano**

Autores:

© **José Solórzano Movilla**, © **Bertha Hernández Contreras**, © **Andrés Porto Solano**  
© **Shirley Sarmiento**, © **Horacio Caicedo** © **Clara Colón López**, © **Melissa Castañeda**,  
© **Claudia Orozco**, © **Nelson Tarazona Mendez**, © **Alexander Salas Moreno**,  
© **José Carmona**, © **Martha Olaciregui Leemow**, © **René Ramírez Fernández**,  
© **Ilma Bonilla Botía**, © **Selene Coelho Loibel**, © **Diana Suárez López**

### **Presidente**

JAIME ENRIQUE MUÑOZ

### **Rectora Nacional**

ALBA LUCÍA CORREDOR GÓMEZ

### **Vicerrector Académico Nacional**

MARIBEL YOLANDA MOLINA CORREA

### **Vicerrector de Investigación Nacional**

ASTELIO DE JESÚS SILVERA SARMIENTO

### **Director Sello Editorial**

JUAN CARLOS ROBLEDO FERNÁNDEZ

Sello Editorial Coruniamericana

selloeditorialcoruniamericana@coruniamericana.edu.co

**Diagramación y portada:** Kelly J. Isaacs González

**Corrección de estilo:** Eva Luna Contreras Mariño

**1a edición:** 11 de diciembre de 2018

Todos los derechos reservados. Ninguna parte de esta publicación puede ser reproducida, almacenada en sistema recuperable o transmitida en ninguna forma o por medio electrónico, mecánico, fotocopia, grabación, u otro, sin previa autorización por escrito del Sello Editorial Coruniamericana y de los autores. Los conceptos expresados en este documento son responsabilidad exclusiva de los autores y no necesariamente corresponden con los de la Corporación Universitaria Americana y da cumplimiento al Depósito Legal según lo establecido en la Ley 44 de 1993, los decretos 460 del 16 de marzo de 1995, el 2150 de 1995, el 358 de 2000 y la Ley 1379 de 2010.

### **Pares Evaluadores**

Luis Gabriel Turizo

Tecnológico de Monterrey, México

Fabian Posada Balvin

Universidade Federal do Rio Grande do Norte, Brasil.

### **Comité Científico**

Paola Amaris Ruidiaz

Ph.D en Educación Matemática

Universidade Estadual Paulista , Brasil

Eliris Cristina Rizzioli

Ph.D en Matemáticas

Universidade Federal de São Carlos, Brasil

Silvia Galvan Guevara

Ph.D en Botánica

Universidade Estadual Paulista , Brasil

Romario de Zousa

Magister en Matemáticas

Universidade Estadual Paulista, Brasil

# Contenido

Prólogo	7
Edo como modelos matemáticos..... <i>Shirley Sarmiento, Horacio Caicedo, Clara Colón</i>	8
Interdisciplinaria en el modelamiento con ecuaciones diferenciales..... <i>José Solorzano Movilla, Melissa Castañeda, Claudia Orozco</i>	23
Una mirada a los aspectos relevantes de la teoría asintótica en el modelamiento de sistemas..... <i>Alexander Salas Moreno, Nelson Tarazona, Bertha Hernández Contreras</i>	38
Generalidades de modelos lineales no perturbados..... <i>Alexander Salas Moreno, José Carmona, Shirley Sarmiento</i>	51
Modelamiento en criptografía, articulación entre el álgebra lineal y la programación estructurada..... <i>Martha P. Olaciregui L., Bertha Hernández, René Ramirez</i>	63
Aplicación del filtro de KALMAN en movimiento parabólico..... <i>Selene Coelho Loibel, Martha P. Olaciregui L., Ilma Bonilla</i>	72
Un modelo basado en sistemas dinámicos estocásticos para la proyección de los resultados de saber pro..... <i>José Solorzano Movilla, Diana Suárez, Clara Colón</i>	86

# Prólogo

Uno de los eventos relevantes de la historia de la ciencia estuvo relacionado con la aparición de la experimentación para comprobar las hipótesis sobre los fenómenos de la naturaleza. Antes de esta práctica, los hechos que circundaban la realidad, como la caída de los cuerpos, eran tratados idealmente con explicaciones de diversa índole a modo de ver por las personas como suficientes y pocas eran puestas en dudas.

En la edad media, Galileo Galilei (1564-1642), inicia un proceso de comprobación haciendo uso del método científico de las hipótesis que hasta ese momento eran aceptadas, de esta manera llega a una máxima que hasta nuestros días hace parte del léxico de las ciencias “el idioma de la naturaleza son las matemáticas” con esta frase el mencionado personaje histórico coloca como eje la idea de la existencia de una función matemáticas que describiera el comportamiento de los fenómenos.

En la actualidad, aunque existen diversas definiciones sobre modelo, todas coinciden en el componente matemático presentes en ellos y el objetivo que estos persiguen, pronosticar un estado de un sistema cualquiera, lo conlleva a que en la formación de los ingenieros se constituya en una meta de aprendizaje el papel que juegan diferentes ramas de las matemáticas en el diseño y aplicación de un modelo.

Bajo la anterior premisa, se presenta el siguiente texto, el cual es resultado de varios esfuerzos conjuntos por parte de los autores, quienes con su trabajo en las aulas apoyan los diversos procesos de formación de los futuros egresados de la Facultad de Ingeniería de la Corporación Universitaria Americana.

# EDO COMO MODELOS MATEMÁTICOS

---

**Shirley Sarmiento\***

**Horacio Caicedo\*\***

**Clara Colón\*\*\***

---

\* Licenciada en Matemáticas y Física, especialista en Estudios Pedagógicos, Profesora tiempo completo Corporación Universitaria Americana, Colombia, shsarmiento@coruniamericana.edu.co

\*\* Ingeniero Electrónico, Especialista en Telecomunicaciones, Profesor tiempo completo Corporación Universitaria Americana, Colombia, choracio@coruniamericana.edu.co.

\*\*\* Ingeniera de Sistemas, Magister en Educación, Profesora tiempo completo Corporación Universitaria Americana, Colombia, ccolon@coruniamericana.edu.co.

## Resumen

### ¿Qué son las ecuaciones diferenciales?

Las ecuaciones diferenciales nacen a partir de la concepción de un problema el cual se trata de encontrar la función primitiva de otra función dada, es otras palabras, se parte de la afirmación que una función  $f(x)$  es la derivada de una función  $F(x)$ , esta  $F(x)$  es la denominada primitiva de la función  $f(x)$ .

Las derivadas, en sus diversas aplicaciones describen procesos de cambios respecto al tiempo de diversos fenómenos de la naturaleza, por lo cual, encontrar la función primitiva es equivalente a calcular un modelo que determina de manera precisa el estado de un fenómeno en un tiempo  $t$  a partir de condiciones iniciales. En consonancia con lo anterior, una ecuación diferencial es una forma matemática de describir hechos del entorno cercano considerando el cambio de este respecto al tiempo.

Muchas áreas del conocimiento toman las ED como herramienta para encontrar soluciones a las situaciones complejas que se presentan de manera frecuente. Entre las cuales se pueden destacar:

- Modelamiento
- Ciencias informáticas
- Economía
- Sistemas dinámicos

En este aparte se tratará la relación entre el modelamiento y las ecuaciones diferenciales ordinarias llamada EDO.

**Palabras claves:** ecuaciones diferenciales, modelamiento, sistemas dinámicos.

## 1. HISTORIA

Las ED toman relevancia al mismo tiempo que el cálculo de variables desarrollado por Isaac Newton (1643-1727) y Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1716), quienes en ubicaciones geográficas diferentes llegaron a las mismas conclusiones mediante planteamientos dispares. Es así, que estudiar el problema inverso de la diferenciación dada una proporcionalidad entre dos cantidades y sus derivadas se convirtió en la semilla que conllevó a lo que hoy en día conocemos como las ecuaciones diferenciales.

### 1.1 Definición de Ecuación Diferencial

Para la definición de ecuaciones diferenciales o E.D y particularmente en nuestro caso las ecuaciones diferenciales ordinarias o E.D.O, no hay una sola, sino que podemos encontrarnos varias y he aquí una de las usadas y encontradas al momento querer conocer este concepto.

“llamamos ecuación diferencial a una ecuación que relaciona una o más funciones (variable dependiente) o variables (variable independiente) y sus derivadas” (Penney & Edwards, 2009).

Para entender esta definición muy usada de las ecuaciones diferenciales hay que resaltar varias palabras claves:

- Ecuación
- Variables
- Función
- Derivada

Recordemos un poco estas palabras claves para poder entender que es una E.D.

#### 1.1.1. Ecuación

Una ecuación se puede definir como una igualdad que contiene uno o más términos desconocidos, llamados incógnitas, una ecuación por lo general se resuelve haciendo uso del método de despeje

Por ejemplo:  $x + 2 = 5$

Esta es una ecuación ya que esta cumple con la definición de que  $x + 2$  es igual a decir 5, pero se puede observar que el 2 está acompañado de una  $x$ , a esta literal se le conoce como incógnita o variable, ya que puede ser cualquier número real que pueda encajar en esa  $x$ , pero para este caso solo un numero puede estar allí, es deducible que para  $x + 2 = 5$  debe ser el numero 3 remplazado en esa  $x$ , llamada incógnita, pero hay ecuaciones mucho más difíciles de desarrollar y utilizan métodos como: eliminación, sustitución, Gauss Jordan, para resolver esta, solo utilizamos despejamos haciendo uso de las propiedades de los números reales que dice que para conocer una incógnita hay que despejar la propiedad de usando los inversos aditivos, que no es más que lo que se hace a un lado de la igualdad afecta también al otro lado, pero de forma inversa.

$$x + 2 = 5$$

$$x + 2 - 2 = 5 - 2$$

$$x = 3$$

Remplazamos

$$(3) + 2 = 5$$

### 1.1.2. Función

Para la función tenemos que es la relación, ley o criterio entre dos conjuntos que asigna a cada elemento del primer un elemento del segundo o ninguno  $f(x) = 3x^2 + 2x$  es igual a decir  $y = 3x^2 + 2x$  donde reemplazamos valores en la variable  $x$  según lo que estemos desarrollando a esta variable  $x$  se le conoce como variable independiente, dado que no depende de nadie para tener su valor, pero la variable  $y$  es conocida como dependiente porque según las operaciones realizadas con las función y la variable  $x$  generara un valor de salida llamado  $y$ , esta variable es también conocida como imagen, dado que refleja un valor de la variable  $x$ .

$y$  = variable dependiente

$x$  = variable independiente

### 1.1.3. Derivada

Para las derivadas tenemos que es en palabras de Penney y Edwards (2009) “un límite hacia el cual tiende la razón entre el incremento de la función y

el correspondiente a la variable cuando el incremento tiende a cero". Las derivadas tienen sus propios métodos, que ya se dan por entendido y que necesitamos para resolver los problemas presentados, además uniendo todos estos conceptos podemos llegar al desarrollo de problemas de las E.D y en particular de la E.D.O.

En una ecuación diferencial lo que se busca es una familia de funciones, diferente a una ecuación en la cual el objetivo es hallar un valor único que hace verdadera la igualdad.

Ejemplo:

$$Y'' + y'6y = 0$$

$$y = C_1e^{2x} + C_2e^{-3x}$$

## 1.2 CLASIFICACIÓN DE LAS E.D.

Las ecuaciones diferenciales se dividen en dos grandes grupos de ecuaciones las ordinarias y las parciales

### 1.2.1. Clasificación por su tipo

#### 1. Ordinarias:

Son aquellas que poseen derivadas con respecto a una sola variable independiente, por ejemplo:

$$dy/dx=3y$$

En este caso tenemos una variable independiente x y la dependiente sería y.

#### 2. Parciales

Son aquellas que poseen derivadas con respecto a dos o más variables independientes, por ejemplo:

$$\frac{\partial y}{\partial x} + 2y = 5z$$

En este caso tenemos una variable independiente  $x$  y  $y$  y la dependiente sería  $y$ .

Son además E.D.O (ecuaciones diferenciales ordinarias), cuando se trata de derivadas de una sola variable y hablamos de E.D.P (ecuaciones diferenciales parciales) cuando se trata de una derivada multivariadas.

### 1.2.2. Clasificación por su orden

El orden de una ecuación diferencial lo determina la máxima derivada que aparece en la ecuación, puede que en una ecuación aparezca más de una derivada, pero solo, la máxima se tomara como el orden de la ecuación

1. E.D.O Primer Orden

$$y' + 3y = 5x$$

2. E.D.O Segundo Orden

$$y'' + 3y = 5x$$

3. E.D.O Tercer Orden

$$y''' + 3y = 5x$$

·  
·  
·

4. E.D.O (n) Orden  $y^{(n)} + 3y = 5x$

Para las E.D.O de segundo orden en adelante se les conoce también como orden superior.

### 1.2.3. Clasificación Por su Linealidad

Una Ecuación Diferencial Ordinaria con linealidad es aquella que cumple con la siguiente regla

$$a_n(x) \frac{d^n y}{dx^n} + a_{n-1}(x) \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \dots + a_1(x) \frac{dy}{dx} + a_0(x)y = g(x);$$

La Anterior regla, muestra que una ecuación es lineal cuando cumple con los siguientes pasos:

Tiene una variable dependiente  $y$

Tiene una variable dependiente  $x$

Es Ordinaria

Tiene la Clasificación de Orden es decir se puede ver si hay primera derivada,

segunda derivada etc...

Debe tener estas características para decir que es lineal o no por ejemplo:

$$dy/dx - 3y = 2x^4$$

De la ecuación anterior podemos decir:

Tiene una variable dependiente en este caso  $y$ , tiene una variable independiente, además ordinaria es decir que solo tiene la variable  $x$  como independiente es de primer orden, ya que al decir  $dy/dx$  es lo mismo a decir  $y'$  y tenemos que esta igualada a la variable independiente  $2x^4$ .

Ahora un ejemplo de una ecuación no lineal

$$\frac{ay}{ax} - 3\frac{ay}{az} = x^2$$

En este caso tenemos a una ecuación con dos variables independientes, según la regla solo se puede ser lineal cuando hay una variable independiente y otra dependiente, además ya no es ordinaria, sino que se vuelve parcial por esta razón ya esta ecuación no es lineal

Por otro lado, de acuerdo con García (2013), es posible encontrar varias definiciones de lo que es un modelo matemático, como la dada por Eykho en 1974 "Es una representación de los aspectos esenciales de un sistema, que presenta conocimiento de ese sistema en una forma útil". También Denn (1986), define "Es un sistema de ecuaciones, cuya solución, dados un conjunto de datos de entrada, representan las respuestas del proceso" finalmente se encuentra la de Seborg, Edgar y Mellichamp (2004), quienes establecen que "Un modelo simplemente es una abstracción matemática de un modelo real" en ese orden de ideas la ecuación o conjunto de ecuaciones que componen el modelo es una aproximación del proceso real. El proceso puede ser, físico, químico, biológico, social, económico entre otros.

## 2. TIPO DE MODELOS

Los modelos son clasificados de acuerdo con el tipo de ecuaciones que son usadas en su formulación, de acuerdo a lo descrito por Close, Frederick y Newell (2001); Edgar y Himmelblau (2001) y Söderström y Stoica (1989).

- Estáticos y dinámicos

- Lineal y no lineal
- SISO, MISO y MIMO (una entrada, una salida. Múltiples entradas, una salida. Múltiples entradas, múltiples salidas, respectivamente)
- Paramétricos y no paramétricos
- Invariantes en el tiempo y variantes en el tiempo
- En el dominio del tiempo y el dominio de la frecuencia
- De tiempo continuo y de tiempo discreto
- Amplitud continua y amplitud discreta
- De parámetro concentrado y de parámetros distribuidos
- Determinísticos y estocásticos

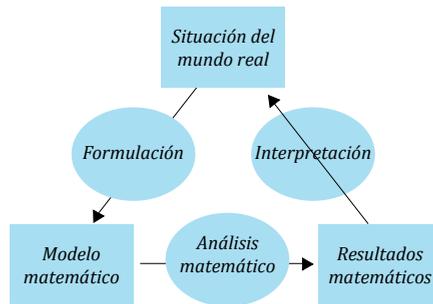


Figura 1. Esquema de modelamiento matemático.  
Fuente: (Penney & Edwards, 2009)

De acuerdo con Norton (1986), Ljung (1999) y Marlin (2000), los modelos pueden ser obtenidos de tres maneras:

### **Teóricamente:**

Los modelos obtenidos de esta manera son desarrollados a partir de la aplicación de principios básicos de la física o de la química (o ambos). Para tal fin se divide el sistema en subsistemas, cuyas propiedades sean bien comprendidas. En otras palabras, se emplean leyes de la naturaleza u otras relaciones fundamentadas en trabajos experimentales anteriores

### **Empíricamente:**

Usa la observación directa de los datos arrojados por un proceso de experimentación (relaciones de causa/efecto correlacionando datos de entrada/salida del proceso). Por lo general, señales de entrada y salida de los sistemas son registrados y sometidos a un análisis para inferir un modelo. Este tipo de trabajo es llamado identificación de sistemas.

### **Por analogía:**

Usa ecuaciones que describen un sistema análogo, con las variables

identificadas por analogía individual. Por ejemplo, el modelo de un sistema eléctrico del tipo R-L-C puede ser usado para describir un sistema mecánico del tipo masa-resorte-amortiguador. Esta analogía es la que permite el uso de los computadores para simular sistemas en otras áreas de la ingeniería

En palabras de Aguirre (2004):

“Estos métodos se pueden combinar, especialmente los teóricos con los empíricos, aplicando técnicas de identificación para estimar los parámetros desconocidos de los modos generados teóricamente y por lo general se hace uso de los siguientes pasos para llegar a la formulación del modelo”.

- Especificar el sistema e imaginar el modelo físico, cuyo comportamiento se ajuste suficientemente bien al comportamiento del sistema real. En esta etapa, las simplificaciones son asumidas y las variables de entrada y salida son escogidas.
- Derivar un modelo matemático para representar el modelo físico, esto significa, escribir las ecuaciones del movimiento del modelo físico. Para lo cual, las leyes físicas apropiadas son aplicadas para generar un conjunto de ecuaciones diferenciales ordinarias en las variables de entrada, de salida y de estados del sistema.
- Teniéndose disponible el modelo matemático obtenido analíticamente se puede estudiar el comportamiento dinámico a través de la solución de las ecuaciones diferenciales de movimiento que lo describen, introduciendo las excitaciones adecuadas en las variables de entrada y almacenando los valores resultantes de las variables de salida.

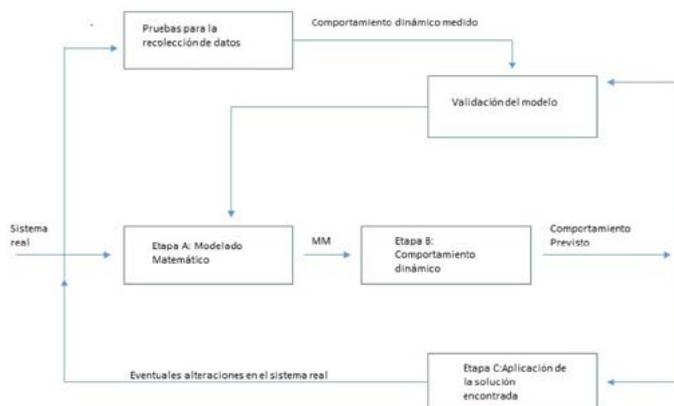


Figura 2. Fases para un modelo dinámico de sistemas.  
Fuente: *Elaboración propia*

Este estudio de los modelos matemáticos haciendo uso de las ecuaciones diferenciales compone lo denominado sistemas dinámicos, en ese sentido, “la dinámica es el estudio de como ciertas entidades varían en el tiempo y de las causas que inducen esas variaciones” (Coelho, A. & Coelho, L., 2004). El objetivo de estudiar la dinámica de los sistemas es comprender y predecir el comportamiento dinámico de un sistema y algunas veces mejorarlo. La semejanza en el comportamiento dinámico de los sistemas físicos permite que se desenvuelvan un patrón analítico de estudios de ese sistema. Según García (2013) hay tres etapas básicas que caracterizan estos estudios:

- Obtención un modelo matemático para representar el fenómeno físico cuyo comportamiento se ajuste suficientemente bien al comportamiento del sistema real. Se debe enfatizar que hay innumerables modelos para describir una realidad física, dependiendo del grado de precisión deseado e el tiempo disponible para el procesamiento computacional del sistema.
- Estudio el comportamiento dinámico del modelo matemático, por medio de la simulación del modelo obtenido en la etapa anterior. En esta etapa se veri can la respuesta temporal de las variables de salida como función de las alteraciones en las variables de entrada.
- Aplicación del modelo matemático para la solución de un problema

Los modelos más comúnmente usados de las EDO que se aplican a la dinámica de sistemas son los relacionados con las ecuaciones diferenciales lineales de primer orden, en especial las de variable separables la cuales modelan los fenómenos derivados del crecimiento exponencial, algunos ejemplos más comunes de aplicación se presentan de manera sintética en el gráfico 3.

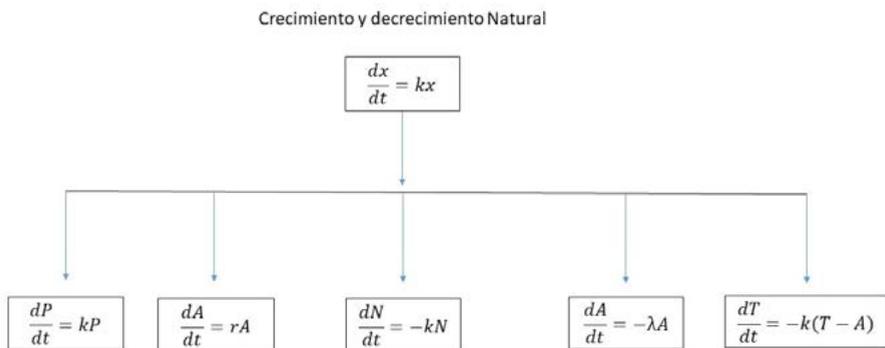


Figura 3. Esquema de aplicaciones de EDO por separación de variables.  
Fuente: elaboración propia.

Donde:

$\frac{dP}{dt} = kP$  es el modelo de crecimiento de poblaciones,  $k$  es llamada constante de la población.

$\frac{dA}{dt} = rA$  es el modelo de crecimiento de capital usando interés compuesto,  $r$  es llamada tasa de interés.

$\frac{dN}{dt} = -kN$  es el modelo de decaimiento radiactivo,  $k$  es llamada constante de decaimiento.

$\frac{dA}{dt} = -\lambda A$  es el modelo que describe la eliminación de una determinada droga de un sistema,  $\lambda$  es llamada constante de eliminación.

$\frac{dT}{dt} = -k(T - A)$  es el modelo que describe el aumento o descenso de la temperatura de un cuerpo,  $k$  es llamada constante enfriamiento(calentamiento), también es llamada ley de enfriamiento de Newton.

Este tipo de modelos conllevan a soluciones matemáticas que explícitamente se representan mediante la función exponencial natural, debido a que esta se ajusta de manera óptima a los fenómenos estudiados los cuales no crecen en linealmente, es decir, a tiempos no se dan crecimientos iguales, en ese sentido, en la gráfica 4, se observa cómo cambia la función a partir del valor que toma la constante  $k$ , esta puede ser entendida como la tasa de crecimiento o decrecimiento en el caso que sea negativa.

Esta característica presentada por la función permite calcular estados de los fenómenos estudiados conociendo las condiciones iniciales, por lo general, estado del fenómeno u experimento en el tiempo cero y el valor de la tasa de crecimiento.

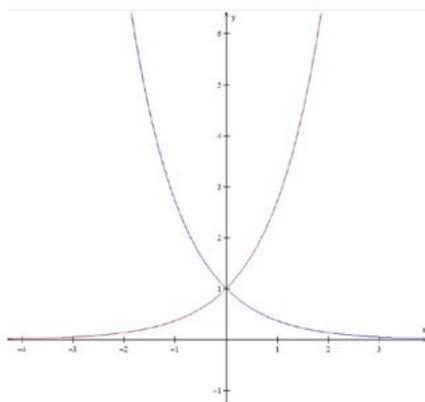


Figura 4. Gráfica de la función exponencial.  
Fuente: *Elaboración propia.*

Considerando válida la definición etimológica del término matemáticas dada por Dámbrossio en 1997 debatida en extenso por Aroca 2016, la cual plantea la matemática como una palabra unión de dos raíces griegas *mathema* (realidad) y *tics* (técnica), de manera amplia al español podría aceptarse como la técnica de la realidad, siendo un poco más explícitos, la matemática se concibe como una forma de percibir la realidad, es su objetivo más profundo lograr optimizar los procesos y fenómenos que están presentes en los imaginarios colectivos derivados de los fenómenos que nos circundan.

Desde este punto de vista, el uso de la experimentación como elemento coadyuvante en el logro de sintetizar la realidad mediante la identificación de patrones y luego el diseño de modelos en las clases de ecuaciones diferenciales se constituye en una herramienta valiosa en la formación del ingeniero.

Tal como lo plantea Trigueros (2009):

Una forma de lograr la contextualización del conocimiento es la presentación de situaciones problemáticas reales que sean factibles de representarse mediante modelos matemáticos” esta estrategia alternativa persigue generar una motivación intrínseca en los estudiantes debido a los problemas comunes en el aprendizaje de las ecuaciones diferenciales cuando se explican de manera expositiva por parte del profesor.

En consecuencia, (Lehrer y Schauble, 2000; Lesh e English, 2005) en Trigueros 2009, plantean que:

Los modelos matemáticos aparecen cuando se tiene la necesidad de responder preguntas específicas en situaciones reales, cuando se requiere tomar decisiones o cuando es imperativo hacer predicciones relacionadas con fenómenos naturales y sociales. El supuesto que subyace a la introducción de la modelación matemática al aula consiste en esperar que, cuando los alumnos enfrentan situaciones problemáticas de interés son capaces de explorar formas de representarlas en términos matemáticos, de explorar las relaciones que aparecen en esas representaciones, manipularlas y desarrollar ideas poderosas que se pueden canalizar hacia las matemáticas que se desea enseñar.

De igual forma Stephan y Rasmussen (2002), hacen una modificación a la metodología de argumentación de Toulmin (1969), en la cual se plantean tres fases para la explicación de los fenómenos mediante tres etapas, Datos, reclamo y garantía, los cuales se presentan de manera gráfica a continuación:

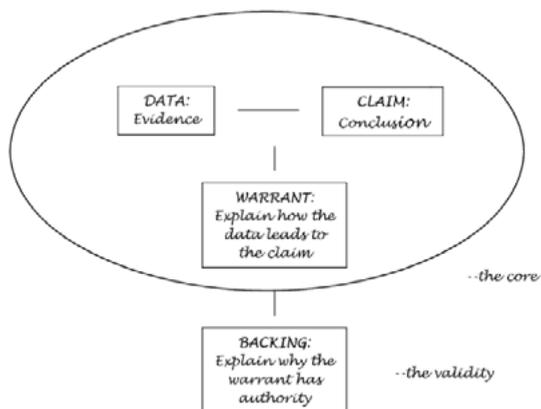


Figura 5. Estructura de Toulmin.  
Fuente: Stephan y Rasmussen (2002)

Esta estructura, mostrada en la figura 5, trata de establecer un orden en la consecución de modelos matemáticos a partir de datos experimentales.

A manera de colofón, la asignatura EDO en el currículo de los programas de ingeniería apunta al desarrollo de capacidades argumentativas que propendan por la articulación de las matemáticas del ciclo básico de ingeniería con la realidad a la cual se enfrentaran los futuros ingenieros a partir de la identificación de modelos.

## Referencias Bibliográficas

- Aguirre, L. A. (2004). *Introducao à identificao de sistemas- Técnicas Lineares e nao-lineares aplicadas a sistemas reais*. 2. Ed. Belo Horizonte: editor UFMG.
- Aroca Araujo, A. (2016). La definición etimológica de Etnomatemática e implicaciones en Educación Matemática. *Educación matemática*, 28(2), 175-195. Recuperado de: [http://www.scielo.org.mx/scielo.php?script=sci\\_arttext&pid=S1665-58262016000200175&lng=es&tlng=es](http://www.scielo.org.mx/scielo.php?script=sci_arttext&pid=S1665-58262016000200175&lng=es&tlng=es).
- Close, C. M., Frederick, D.K. & Newell, J.C. (2001). *Modeling and Analysis of Dinamic Systems*. 3. Ed. New York, John Wiley & Sons, 2001.
- Coelho, A. A. R. & Coelho, L. S. (2004). *Identificao de sistemas dinâmicos lineares*. Florianópolis: Editora da UFSC.
- Denn, M. M. (1986). *Process Modeling*. Harlow, Longman.
- Edgar, T. F. & Himmelblau, D. M. (2001). *Optimization of chemical processes*. 2. Ed. New York: McGraw Hill.
- García, C. (2013). *Modelagem e Simulacao de processos industriais e de sistemas eletromecânicos*. 2 ed. São Paulo: Editora de Universidade de São Paulo. Ljung, L. *System Identification: Theory for de user*. 2. Ed. Englewood Cliffs. Prentice Hall, 1999.
- Ljung, L. (1999). *System Identification: Theory for de user*. 2. Ed. Englewood Cliffs. Prentice Hall.
- Marlin, T. E. (2000). *Process Control: Designing Process and Control Systems for Dynamic performance*. 2. Ed. New York: McGraw Hill.
- Norton, J. P. (1986). *Na introduction to identification*. London Aademic Press.
- Penney, D. E. & Edwards, C. H. (2009). *Ecuaciones diferenciales y problemas con valores de la frontera*. Pearson Educación. University of Georgia, Athens.
- Seborg, D. E., Edgar, T. F. & Mellichamp, D. A. (2004). *Process Dynamics and Control*. 2. Ed. New York: John Wiley & Sons.

Söderström, T. & Stoica P. (1989). *System Identification*. Hemel Hempstead. UK: Prentice Hall International.

Stephan, M. & Rasmussen, C. (2002). Classroom mathematical practices in differential equations. *The Journal of Mathematical Behavior*, 21(4), 459–490. doi: 10.1016/s0732-3123(02)00145-1

Toulmin, S. (1969). *The uses of argument*. Cambridge: Cambridge University Press.

Trigueros, M. (2009). El uso de la modelación en la enseñanza de las matemáticas. *Innovación Educativa*. 9(46). 75-87. Recuperado de: <https://www.redalyc.org/pdf/1794/179414894008.pdf>

# **INTERDISPLINARIEDAD EN EL MODELAMIENTO CON ECUACIONES DIFERENCIALES**

---

**José Solorzano Movilla\***  
**Melissa Castañeda\*\***  
**Claudia Orozco\*\*\***

---

\* Magister en Matemáticas por la Unesp campus Rio Claro-Brasil, Profesor tiempo completo Corporación Universitaria Americana, Colombia, jsolorzano@coruniamericana.edu.co

\*\* Ingeniera en Mecatrónica, Especialización en Pedagogía y Docencia, Maestría en Diseño y Gestión de Proyectos, Profesor tiempo completo Corporación Universitaria Americana, Colombia, mcastanedap@coruniamericana.edu.co.

\*\*\* Lingüista, Profesor tiempo completo Corporación Universitaria Americana, Colombia, corozco@coruniamericana.edu.co.

## Resumen

Las razones de cambio entre variables son representadas por medio de las derivadas, en consecuencia, las ecuaciones diferenciales ordinarias (EDO), son tomadas como modelos para describir procesos de la naturaleza, como los siguientes:

- \_ Ley de enfriamiento de Newton
- \_ Ley de Torricelli
- \_ Crecimiento de poblaciones
- \_ Movimiento uniforme acelerado
- \_ Entre otros

Es posible identificar tres objetivos con las EDO. Primero, descubrir la ED que describe una situación física específica, segundo, encontrar de forma exacta o aproximada la solución apropiada a la ecuación descubierta y finalmente interpretar la solución encontrada.

**Palabras clave:** Ecuaciones diferenciales, modelamiento, aplicaciones, interdisciplinariedad

## **Introducción**

La articulación entre las ecuaciones diferenciales ordinarias (EDO) y los modelos matemáticos sigue una serie de pasos los cuales se describen a continuación:

- Formulación en términos de ecuaciones matemáticas de un problema o fenómeno del contexto natural.
- Análisis o solución del problema o modelo matemático expresado en términos de ecuaciones.
- Interpretación y prueba de los resultados matemáticos en el contexto natural donde se dio el fenómeno.

La mencionada articulación que se da a partir de los modelos matemáticos permite que situaciones diversas puedan analizarse desde varias perspectivas u áreas del conocimiento como lo son las ciencias físicas, la economía o la geografía.

La estrategia fundamentada en el diseño de modelos matemáticos para la enseñanza de las matemáticas fue propuesta por Toulmin (1969) y se compone de tres fases, los datos, reclamo y garantía, con estas fases se pretendía sustentar las argumentaciones que conllevaran a la validez de una explicación de un fenómeno natural que era modelado.

A continuación se presentan dos ejemplos que desde la interdisciplinariedad se desarrollaron en una clase de ecuaciones diferenciales, el primero integra elementos de geografía y economía a partir de datos reales obtenidos de la población de una ciudad colombiana de la página web del Departamento Administrativo de Estadística (DANE), con los mismos se estima la población en un tiempo  $t$  y a posteriori se lleva la comparación del dato estimado con la información disponible para ese año en la aplicación informática del DANE.

El segundo ejemplo, relaciona los modelos de las ecuaciones diferenciales con la física, mediante el uso de la ley de enfriamiento de Newton. El objetivo de esta experiencia es corroborar como los estudios teóricamente en la clase de ecuaciones diferenciales es aplicable en la cotidianidad.

### ***Crecimiento de poblaciones***

A continuación, se conocerán los índices de crecimiento de la población bogotana durante unos años específicos. Aplicando la fórmula general de crecimiento poblacional aprendida, anteriormente, se compararán los resultados obtenidos por ella con los datos arrojados por el DANE.

El crecimiento poblacional ha servido para modelar sistemas matemáticos que ayuden a entender cómo crece un determinado número de población en un espacio considerado en un intervalo.

Es muy importante poder estimar el comportamiento futuro de una población, es decir, saber cómo va a aumentar o a disminuir.

#### *- Discusión teórica*

El crecimiento de las poblaciones se puede considerar como un promedio porcentual en el tiempo del cambio en la cantidad de habitantes, como resultado de la diferencia entre nacimientos y fallecimientos de una población determinada.



Gráfico 1: Muestra de los índices de población de 1793- 2005  
Fuente: Elaborado por el autor. |

La tasa de crecimiento puede ser positivo o negativo de acuerdo a como se dé la variación entre personas fallecidas y los nacimientos, además de otros factores como el espacio disponible para el crecimiento y los recursos disponibles como la alimentación o en el caso de las colonias de bacterias la cantidad de oxígeno.

- *Métodos experimentales*

El análisis se hizo tomando como muestra inicial el censo del año 1985; a partir de ahí se tomaron los datos del comportamiento poblacional generado 5 y 10 años después, es decir, 1990 y 2000. Los datos se escogieron teniendo en cuenta el rango de edad entre 15 a 19 años; la comparación se hizo a partir del último año escogido.

Datos del DANE:

Edades: 15-19 años

1985→429.585

1990→461.198

2000→632.706

Se puede demostrar que estos datos son reales en la imagen que se encontraran en anexos.

Ecuación que genera los datos de comparación:

$$P(t) = P_0 e^{kt}$$

- *Análisis de resultados:*

$$P(0) = 429.598 \rightarrow P = 429.598, t = 0$$

$$P(5) = 461.198 \rightarrow P = 461.198, t = 5$$

$$P(15) = ? \rightarrow \text{Población que se calculará}$$

$$[ec. 1] P(t) = 429.598 e^{kt}$$

$$461.198 = 429.598 e^{5k}$$

$$\frac{461.198}{429.598} = e^{5k}$$

$$1,073 = 5k$$

$$\frac{1,073}{5} = k$$

$$0,014 = k$$

Se reemplaza  $k$  en ec.1

$$P(t) = 429.598 e^{(0,014)(15)} = 653.482$$

- *Hipótesis*

Teniendo en cuenta los cálculos hechos anteriormente podemos demostrar que probablemente haya una pequeña muestra o un margen de error que nos indica las posibilidades de equivocación que pudimos haber tenido en el desarrollo de los cálculos.

Margen de error

$$\frac{632.706}{653.482} = 0,96$$

$$0,96 * 100 = 97\%$$

El margen de error es del 3%, es decir, es una mínima posibilidad de que nuestros cálculos estén errados; ya que se puede considerar que este pequeño índice se pudo dar por algunos decimales que no tuvimos en cuenta.

- *Conclusión de la experiencia*

En conclusión, podemos afirmar que entre los datos del Dane y los obtenidos por la fórmula hay una diferencia sustancial.

Según nuestra fuente de información la población en el 2000 fue de 632.706 habitantes en la ciudad trabajada (Bogotá) y con la fórmula aplicada sería de 653.482; Lo que significa que la diferencia fue de 20.776 habitantes.

Se puede pensar que si utilizamos nuestra fórmula para obtener algún otro dato poblacional probablemente estaríamos acercándonos al dato real con un índice de diferencia no muy grande.

*Ley de enfriamiento*

- *Introducción*

En esta experiencia tuvimos como finalidad conocer el tiempo de

enfriamiento y calentamiento de un líquido para que al obtener los datos pudiéramos aplicar los conocimientos adquiridos en la asignatura de ED respecto al fenómeno de los cambios en la temperatura y establecer un margen de error de los resultados adquiridos.

Especificamos los elementos a usar en esta experiencia y procedimos a realizarla, primeramente, ubicamos un recipiente con agua (beaker) al fuego (mechero de bunsen) hasta que el líquido llegara a la temperatura de ebullición 100°C, medimos la temperatura en diferentes tiempos con un termómetro para asegurar la temperatura exacta, procedimos a dejar enfriar el líquido y a medir en lapsos de 3min como la temperatura disminuía volviendo a su temperatura inicial.

- *Discusión teórica*

De acuerdo a lo establecido por Newton quien propuso que la rapidez o velocidad con la que se enfría un objeto es proporcional a la diferencia entre su temperatura y la del medio que le rodea, llamada temperatura ambiente.

Aplicamos esta ley en la experiencia para determinar los momentos en que cambia la temperatura.

$$dT/dt = -k(T-A)$$

Donde;

**K:** constante

**T:** Temperatura del cuerpo

**t:** Tiempo

**A:** Temperatura ambiente

- *Métodos experimentales*

La experiencia inicio con el análisis de cada uno de los elementos, el funcionamiento, el debido uso, las indicaciones de trabajo y la presentación de fórmulas a aplicar.

- Termómetro.
- Cronometro.

- Beaker
- Soporte universal.
- Mechero de Bunsen



Ilustración 1. *Soporte universal*  
Fuente: *Elaborada por el autor*



Ilustración 2. *Mechero de Bunsen*  
Fuente: *Elaborada por el autor*



Ilustración 3. *Beaker; termómetro, soporte*  
Fuente: *Elaborada por el autor*

Lo primero que hicimos en este experimento fue poner en práctica nuestro conocimiento del método de la temperatura. Al iniciar lo primero que tomarnos fue la temperatura ambiente que fue de  $27^{\circ}\text{C}$ , procedimos a someter el beaker que contenía aproximadamente 35 ml de agua y su temperatura inicial fue de  $24^{\circ}\text{C}$  a los efectos del mechero de bunsen hasta alcanzar una temperatura de  $100^{\circ}\text{C}$ ; sumergimos el termómetro hasta identificar con exactitud dicha temperatura. Al finalizar después de haber llegado a los  $100^{\circ}\text{C}$  y haber apagado el mechero ya dejando reposar el agua tomamos nuevamente la temperatura enfriándose en un lapso de tiempo de 3min.



Ilustración 4. Agua hirviendo  
Fuente: Elaborada por el autor



Ilustración 5. Midiendo temperatura del agua  
Fuente: Elaborada por el autor



Ilustración 6. Agua enfriando para tomar temperatura  
Fuente: Elaborada por el autor

- *Análisis de resultados*

Concretando la experiencia hemos identificado el cambio de temperatura en lapsos de tiempo de 3min después de llevar la temperatura a su punto de ebullición, los datos arrojados en la experiencia están ubicados en la Tabla N°1

Tabla 1  
Relación tiempo – temperatura

Tiempo (min)	Temperatura alcanzada
0	100°C
3	81°C
6	76°C
9	70°C
12	64°C
15	66°C
18	60°C
21	54°C
24	49°C

Fuente: Elaborado por el autor.

Posteriormente realizamos ejercicios para comprobar mediante ecuaciones el cambio de temperatura en un lapso de tiempo

$$T_{(0)} = 100^{\circ}\text{c} \quad T_A = 27^{\circ}\text{c}$$

$$T_{(9)} = 76^{\circ}\text{c}$$

$$T_{(15)} = ?$$

$$T(t) = A + B e^{-kt}$$

$$100 = 27 + B e^{-k(0)}$$

$$100 - 27 = B e^{-k(0)}$$

$$73 = B$$

$$76 = 27 + 73 e^{-k(9)}$$

$$76 - 27 = 73 e^{-k(9)}$$

$$49/73 = e^{-k9}$$

$$\ln 0,67 = -k9$$

$$-0,398 - 9 = k$$

$$0,044 = k$$

$$T_{(15)} = 27 + 73 e^{-(0,044)(15)}$$

$$T_{(15)} = 27 + (73)(0,5168)$$

$$T_{(15)} = 27 + 37,73$$

$$T_{(15)} = 64.73$$

- Aproximación a 66°.
  - o Varía por aire acondicionado.
  - o La puerta del laboratorio estaba abierta.
  - o No hay exactitud de temperatura de la llama.

$$dT/dt = -k(T-A)$$

$$T_{(0)} = 100^{\circ}\text{C}$$

$$T_{(6)} = 81^{\circ}\text{C}$$

$$T_{(21)} = ?$$

$$100 = 27 + B e^{-k(6)}$$

$$73 = B$$

$$81 = 27 + 73 e^{-k(6)}$$

$$54 = 73 e^{-k(6)}$$

$$54/73 = e^{-k(6)}$$

$$\ln 0,739 = -k(6)$$

$$-0,3014 - 6 = k$$

$$0,0502 = k$$

$$T_{(21)} = 27 + 73 e^{-(0,0502)(21)}$$

$$T_{(21)} = 27 + 73(0,348)$$

$$T_{(21)} = 27 + 25,41$$

$$T_{(21)} = 52,41^{\circ}\text{C}$$

Después de realizar y analizar los ejercicios por el método de ecuaciones, vimos como en los resultados hay una aproximación y solo un pequeño margen de error

Tabla 2.  
Análisis de resultado

Experiencia Lab		Ecuaciones		% Error
Tiempo	Temperatura	Tiempo	Temperatura	
15	66°C	15	64,73	1.92
21	54°C	21	52,42°C	2.9

Fuente: Elaborado por el autor.

- *Conclusión de la experiencia*

Al finalizar esta experiencia pudimos concretar que los resultados obtenidos concuerdan con los resultados teóricos arrojados tras la realización de los ejercicios por ecuaciones diferenciales, el margen de error que se calculó en el análisis de los resultados de esta fue mínimo.

Una vez más hemos visto como los estudios matemáticos concuerdan de forma muy efectiva con lo realizado diariamente y de una manera fácil.

### **A modo de colofón**

Las experiencias mostradas anteriormente dan cuenta de cómo el proceso de construcción conceptual a partir de la puesta en marcha de experimentos con el objetivo de contrastar teoría con la realidad conlleva necesariamente a la interacción de disciplinas disímiles a primera vista, pero que en el ejercicio profesional, se presentan interrelacionadas, como lo plantea Grossman en Henao et al. (2018), la interdisciplinariedad “Comprende la interacción entre dos o más disciplinas diferentes y ocurre en la intersección entre disciplinas. Esto puede variar desde el compartir de ideas hasta la integración total de conceptos, metodología, procedimientos, teorías, terminología, datos, organización de la investigación y entrenamiento” en relación a lo definido, en la búsqueda del mejoramiento de los procesos de aprendizaje se hizo planteo una metodología basada en el aprendizaje basado en proyectos como una forma de motivar el estudio de las ecuaciones diferenciales y a su vez hacia el modelado de fenómenos.

Por otro lado, es posible establecer una ruta metodológica para la implementación del modelamiento para llevar a cabo actividades interdisciplinarias:

- Reconocimiento de los patrones: en esta se identifican características que los datos tomados comparten y se analiza si entre ellos existe alguna relación matemática por medio de herramientas estadísticas, como lo plantea Plazas (2015).
- Diseño del modelo: en este se llevan a cabo los pasos mencionado al principio de este capítulo, formulación, análisis e interpretación.
- Simulación y/o diseño de aplicaciones informáticas: en este paso, se considera que las situaciones modeladas responden a las necesidades planteadas o requerimientos expuestos por la situación, con esta claridad se plantea llevar a simulaciones con las cuales se pronostiquen o estimen resultados posibles, de este modo, se intenta llevar un pensamiento concreto a un nivel de abstracción más alto.



Figura 1. Pasos en la articulación para la estrategia de modelado.  
Fuente: Elaboración propia.

En la figura 1, se muestra como se interrelacionan los pasos para llevar a cabo la implementación del modelamiento en una estrategia que apunte a la interdisciplinariedad. El llevar a la práctica esta estructura conlleva tener conocimientos previos sólidos por cuanto se hace necesario usar desde herramientas estadísticas hasta conceptos aplicados del cálculo.

Esta metodología, confirma lo planteado por Trigueros en 2009 “Una forma de lograr la contextualización del conocimiento es la presentación de situaciones problemáticas reales que sean factibles de representarse mediante modelos matemáticos” acciones que han mostrado ser un mecanismo eficiente para la enseñanza de las matemáticas en los programas de ingeniería.

### Datos considerados

2.278.853	2.518.681	4.947.890	2.351.993	2.595.897
292.415	284.535	581.738	296.620	284.918
282.392	298.998	591.998	287.481	304.517
249.735	257.607	532.404	261.083	271.321
219.048	228.271	461.188	225.902	235.298
229.523	249.470	482.343	231.556	250.787
223.737	250.871	486.927	229.977	256.950
105.956	214.248	419.127	194.947	224.100
146.618	170.443	333.508	154.121	179.387
115.098	133.508	262.142	121.124	141.018
87.213	101.584	199.270	92.321	106.949
65.724	81.694	153.792	68.724	85.068
54.902	67.590	125.620	56.142	69.470
46.058	58.226	106.935	47.353	59.582
34.163	46.692	83.653	35.381	48.272
23.960	33.693	60.066	24.949	35.117
12.785	22.966	37.742	14.063	23.679

Figura 2. Datos de 1990 de la población de la ciudad de Bogotá en el rango de edad de 15-19 años.  
Fuente: Tomada por el autor.

6.189.030	2.960.034	3.228.996	6.302.881	3.016.761
632.757	322.180	310.577	620.505	316.962
621.379	317.827	303.552	632.173	322.712
597.313	300.610	296.703	596.836	302.778
628.969	301.939	327.050	632.706	304.536
587.011	283.305	303.708	603.218	290.560
526.574	252.362	274.212	534.374	256.363
520.307	245.727	274.580	521.878	246.891
489.993	228.200	261.793	501.188	233.827
404.431	185.609	218.822	422.422	194.054
316.008	144.398	171.610	331.781	151.492
245.044	112.169	132.875	256.073	117.886
183.188	83.423	99.785	193.289	88.305
130.269	60.342	77.927	144.534	63.200
108.452	46.966	61.486	111.734	48.294
84.393	35.526	48.867	86.974	36.673
55.374	21.711	33.663	58.028	23.349

Figura 3. Datos de 2000 de la población de la ciudad de bogotá en el rango de edad de 15-19 años.  
Fuente: Tomada por el autor.

## **Referencias Bibliográficas**

- Henaó, C., García, D., Aguirre, E., González, A., Bracho, R., Solorzano, J. & Arboleda, A. (2017). Multidisciplinariedad, Interdisciplinariedad y Transdisciplinariedad en la formación para la investigación en ingeniería. *Revista Lasallista de Investigación*, 14(1) 179-197.
- Plaza, L. (2015). *El modelamiento matemático aplicado en Ingeniería*. Uceva, Tulua.
- Toulmin, S. (1969). *The uses of argument*. Cambridge: Cambridge University Press.
- Trigueros, M. (2009). El uso de la modelación en la enseñanza de las matemáticas. *Innovación Educativa*. 9(46). 75-87. Recuperado de: <https://www.redalyc.org/pdf/1794/179414894008.pdf>

# **UNA MIRADA A LOS ASPECTOS RELEVANTES DE LA T EORIA ASINTÓTICA EN EL MODELAMIENTO DE SISTEMAS**

---

**Alexander Salas Moreno\***

**Nelson Tarazona\*\***

**Bertha Hern andez Contreras\*\*\***

---

\* Licenciado en matemáticas y Física, Magister en Matemáticas, Docente Vinculado al Magisterio, Colombia, [algebranet@gmail.com](mailto:algebranet@gmail.com)

\*\* Ingeniero de sistemas, Magister en Dirección Estratégica en Tecnologías de la Información, Profesor tiempo completo Corporación Universitaria Americana, Colombia, [ntarazona@coruniamericana.edu.co](mailto:ntarazona@coruniamericana.edu.co).

\*\*\* Ingeniera de Sistemas, Especialista en Auditoría de Sistemas, Magister en Educación, Directora del programa de Ingeniería de Sistemas en Corporación Universitaria Americana, Colombia, [bhernandez@coruniamericana.edu.co](mailto:bhernandez@coruniamericana.edu.co).

## Resumen

En este capítulo, la atención está centrada en las propiedades asintóticas de la función  $J_{\lambda}(n)(\theta)$ , llamada la función criterio de estimación de parámetros desconocidos  $\theta$ , para lo cual se utilizarán algunos lemas que permitan establecer los supuestos asintóticos en los que se basa la consistencia, estabilidad y normalidad del estimador de mínimos cuadrados  $\hat{\theta}^n$ .

**Palabras clave:** Estimación de parámetros, teoría asintótica, modelos.

## Introducción

Dado el modelo no lineal descrito en la ecuación (1.1) y el conjunto de observaciones  $Y(X_1), Y(X_2), \dots, Y(X_n)$ , entonces la función criterio  $J_n(\theta)$ , es definida como

$$J_n(\theta) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n [Y(X_i) - f(X_i, \theta)]^2 \quad (1.1)$$

Con  $\theta \in \Theta$  y errores aleatorios  $Z_i, i=1, 2, \dots, n$  con distribución normal, es decir,  $E[Z_i]=0$

### 1.1. SUPUESTOS ASINT OTICOS PARA LA ESTIMACIÓN DE PARÁMETROS DESCONOCIDOS

Inicialmente formulamos los siguientes lemas para establecer ciertos supuestos asint oticos en la consistencia del estimador de mínimos cuadrados  $\hat{\theta}^n$ .

LEMA 1:

Sea  $\Theta$  el espacio de parámetros desconocidos, un subconjunto limitado y compacto de  $\mathbb{R}^n$ , es decir  $\Theta \subset \overline{\text{int}(\Theta)}$ . Defínase  $\mathcal{X}$  como un subconjunto medible de Borel en  $\mathbb{R}^m$  y la función criterio de estimación respecto a la variable  $X$  y  $\theta, J(X, \theta)$ , medible y continua en el conjunto  $\mathcal{X} \times \Theta$ , entonces, para el estimador de  $\theta$ , tales que  $\hat{\theta} \in \Theta$ , ocurre que

$$J[X, \hat{\theta}(X)] = \min_{\theta \in \Theta} J(X, \theta).$$

Además,  $J(X, \theta)$  es medible en el conjunto  $\mathcal{X}$ .

Las condiciones utilizadas en el Lema 1, establecen el primer supuesto asint otico

**$H_1$ :**  $\Theta$  es un subconjunto compacto en  $\mathbb{R}^n$ , tal que  $\Theta \subset \overline{\text{int}(\Theta)}$ .

LEMA 2:

Si la función criterio  $J_n(\theta)$  forma una secuencia continua de vectores aleatorios  $\{J_i(\theta)\}, i = 1, 2, \dots, n$  que converge en  $\Theta$  a la función  $J_{\bar{\theta}}(\theta)$ , siendo  $\bar{\theta}$  el verdadero valor de parámetros desconocidos de  $\theta$ , tales que

$$J_{\bar{\theta}}(\theta) > J_{\bar{\theta}}(\bar{\theta}) \text{ Para todo } \bar{\theta} \neq \theta$$

Entonces

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \hat{\theta}^n = \bar{\theta} \blacksquare$$

Este lema es importante para definir la consistencia del estimador de mínimos cuadrados si la convergencia es fuerte o casi segura.

LEMA 3:

Sea  $\Theta$  un subconjunto compacto de  $\mathbb{R}^n$ ,  $\mathcal{X}$  un subconjunto medible de  $\mathbb{R}^m$ , además la función criterio de estimación  $J(X, \theta)$ , medible, limitada en  $\mathcal{X} \times \Theta$  y continuamente diferenciable en  $\Theta \subset \overline{\text{int}(\Theta)}$ . Para dos funciones de parámetros  $\theta_1(X)$  y  $\theta_2(X)$  en  $\mathcal{X} \times \Theta$ , se tiene que

$$J[X, \theta_1(X)] - J[X, \theta_2(X)] = \frac{\partial J(X, \theta)}{\partial \theta^T} [\theta_1(X) - \theta_2(X)] \blacksquare$$

Del lema anterior es posible enunciar los siguientes supuestos asintóticos de gran aplicación en la convergencia uniforme

**H<sub>2</sub>**: Si  $J(X, \theta)$  es la función  $f(X, \theta)$ , de manera que  $f(X, \theta)$  esté limitada en  $\mathcal{X} \times \Theta$ , entonces  $f(X, \theta)$  es continua en  $\Theta$ , para todo  $X$  en  $\mathcal{X}$ .

**H<sub>3</sub>**: Si  $\Theta \subset \overline{\text{int}(\Theta)}$  y para todo  $X$  en  $\mathcal{X}$ , la función  $f(X, \theta)$  es doblemente y continuamente diferenciable en  $\Theta$ .

## 2.3. CONSISTENCIA DEL ESTIMADOR DE MÍNIMOS CUADRADOS

A continuación se establecen las condiciones asintóticas de estimabilidad para los parámetros  $\theta$  y  $\bar{\theta}$  que se utilizarán en los siguientes teoremas y lemas para la formulación de la consistencia de mínimos cuadrados  $\hat{\theta}^n$

### 2.3.1. CONDICIONES DE ESTIMABILIDAD

$$i) \int_{\mathcal{X}} [f(X, \theta) - f(X, \bar{\theta})]^2 \xi(dX) = 0 \Leftrightarrow \theta = \bar{\theta} \quad (1.18)$$

$$ii) \text{ Si } S_n(\theta) = n J_n(\theta) = \sum_{i=1}^n [Y(X_i) - f(X_i, \theta)], \text{ entonces para } \delta > 0 \text{ y } \|\theta - \bar{\theta}\| > \delta, \text{ se cumple } \inf [S_n(\theta) - S_n(\bar{\theta})] > 0. \quad (1.9)$$

$$iii) D_n(\theta, \bar{\theta}) = \sum_{i=1}^n [f(X_i, \theta) - f(X_i, \bar{\theta})]^2 \quad (1.10)$$

### TEOREMA 5: CONSISTENCIA DEL ESTIMADOR $\hat{\theta}^n$

Sea  $\{X_i\}$  un diseño discreto asintótico o un diseño aleatorizado en el sentido de las definiciones 1.2.1. Considere que el estimador  $\hat{\theta}^n$  minimiza a la función de estimación  $J_n(\theta)$  en el modelo descrito en 1.1. y suponiendo que son satisfechos los supuestos  $H_1, H_2$  y  $H_3$ , además para el diseño  $\xi$  y el verdadero valor de parámetros  $\bar{\theta}$  se cumple la condición de estimabilidad 1.18, entonces, para la secuencia  $Y(X_1), Y(X_2), \dots, Y(X_n)$ , con pesos respectivos  $\omega(X_i) = 1$ , se tiene que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \hat{\theta}^n = \bar{\theta} \text{ y } \lim_{n \rightarrow \infty} [\hat{\sigma}^2]^n = \int_{\mathcal{X}} \sigma^2(X) \xi(dX)$$

Donde  $[\hat{\sigma}^2]^n = \frac{1}{n-p} \sum_{i=1}^n [Y(X_i) - f(X_i, \hat{\theta})]^2$ , siendo  $p = \dim(\theta)$ .

[Ver demostración: Pronzato y Zhigljavsky (2009, p.22).

La condición de estimabilidad 1.18 utilizada en el lema anterior implica que la expresión  $\sum_{i=1}^n [Y(X_i) - f(X_i, \hat{\theta})]^2$  crece al infinito cuando  $\theta \neq \bar{\theta}$  lo cual requiere que el diseño de variables  $\{X_i\}$  crezca infinitamente en el espacio  $\mathcal{X}$ .

El lema y el teorema que a continuación se presentan demuestran que la consistencia del estimador  $\hat{\theta}^n$  se preserva a pesar que  $\mathcal{X}$  sea finito, considerando la convergencia

- En probabilidad o
- Casi segura (c.s)

### CONSISTENCIA DEL ESTIMADOR $\hat{\theta}^n$ CUANDO $\mathcal{X}$ ES FINITO

#### LEMA 4:

Dado un  $\delta > 0$  en el espacio finito de variables  $\mathcal{X}$  y  $\|\theta - \bar{\theta}\| > \delta$ , si el cumplimiento de la condición de estimabilidad 1.19 es satisfecha y  $\liminf_{n \rightarrow \infty} \{ \inf [S_n(\theta) - S_n(\bar{\theta})] \} > 0$ , c. s (Casi seguro).

Entonces  $\hat{\theta}^n \rightarrow \bar{\theta}$  c. s cuando  $n \rightarrow \infty$ . Además para cualquier  $\delta > 0$  y  $\|\theta - \bar{\theta}\| > \delta$ , si se cumple la condición de probabilidad  $Prob \{ \inf [S_n(\theta) - S_n(\bar{\theta})] > 0 \} \rightarrow 1$ , para  $n \rightarrow \infty$

Entonces  $\hat{\theta}^n \rightarrow \bar{\theta}$  en probabilidad.

**TEOREMA 6:**

Sea  $\{X_i\}$  una secuencia de variables aleatorias en el espacio finito  $\mathcal{X}$  y considerando la condición de estimabilidad 1.20, se tiene que

i) Para todo  $\delta > 0$ ,  $\left[ \inf_{\|\theta - \bar{\theta}\| > \delta} D_n(\theta, \bar{\theta}) \right] / [\log \log n] \xrightarrow{c.s} \infty$  con  $n \rightarrow \infty$ , entonces  $\hat{\theta}^n \rightarrow \bar{\theta}$ .

ii) Si se satisface que  $\inf_{\|\theta - \bar{\theta}\| > \delta} [D_n(\theta, \bar{\theta})] \rightarrow \infty$ , con  $n \rightarrow \infty$ , entonces  $\hat{\theta}^n \xrightarrow{p} \bar{\theta}$ .

La condición  $[D_n(\bar{\theta}, \bar{\theta})] \rightarrow \infty$ , es necesaria para la existencia de cualquier consistencia débil del estimador  $\hat{\theta}^n$ .

**2.3.2. EJEMPLO**

Dado el siguiente modelo de regresión no lineal  $Y_i = \cos(2\pi X_i \theta) + Z_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$  (1.21)

Donde  $Y_i$  son las observaciones realizadas,  $\theta$  representa los parámetros desconocidos del modelo 1.21,  $X_i$  es un vector asociado a los tiempos de registro de la experimentación, tal que  $X_i = (t_i)$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$  y  $Z_i$  son los errores aleatorios independientes con distribución normal, es decir, media cero y varianza positiva  $\sigma^2$ , se desea mostrar la consistencia del estimador de mínimos cuadrados del modelo 1.21,  $\hat{\theta}^n$ , que minimiza la ecuación

$$S_n(X_i, \theta) = \sum_{i=1}^n [Y_i(X_i, \theta) - \cos(2\pi X_i \theta)]^2.$$

Siendo  $\bar{\theta}$  el verdadero valor de parámetros de  $\theta$ , se escribe:

$$\begin{aligned} \frac{1}{n} \{S_n(\theta) - S_n(\bar{\theta})\} &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \{[Y_i(X_i, \theta) - \cos(2\pi X_i \theta)]^2 - Z_i\} \\ &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n [\cos(2\pi X_i \bar{\theta}) - \cos(2\pi X_i \theta)]^2 + \\ &\quad \frac{2}{n} \sum_{i=1}^n Z_i [\cos(2\pi X_i \bar{\theta}) - \cos(2\pi X_i \theta)] \end{aligned}$$

Según Wu, 1981, para todo  $\delta > 0$ , se tiene que Wu,

$\inf \frac{1}{n} \{S_n(\theta) - S_n(\bar{\theta})\} > 0$  para todo  $\|\theta - \bar{\theta}\| > \delta$ . De acuerdo con el lema 4

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \inf \left\{ \inf \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n [\cos(2\pi X_i \bar{\theta}) - \cos(2\pi X_i \theta)]^2 \right\} > 0$$

Por lo cual se concluye que  $\hat{\theta}^n \rightarrow \bar{\theta}$  c.s.

El resultado anterior se verifica mediante el siguiente

#### TEOREMA 7:

Si  $\hat{\theta}^n$  es un estimador de mínimos cuadrados de  $\theta$  para un modelo no lineal, como el descrito en 1.1, entonces es un estimador fuertemente consistente de  $\theta$  ■

#### 2.4. NORMALIDAD ASINTÓTICA DEL ESTIMADOR $\hat{\theta}^n$

La teoría expuesta hasta este momento, permite establecer la normalidad asintótica que cumple el estimador de mínimos cuadrados de parámetros  $\theta$ . Se considera para ello la convergencia en distribución normal a una variable aleatoria  $\vartheta$ , la cual se denota como " $\xrightarrow{d} \vartheta$ ". Formalmente, la definición de normalidad asintótica se expone a través del siguiente

#### TEOREMA 8

Sea  $\{X_i\}$  un diseño discreto asintótico o un diseño aleatorizado en el sentido de las definiciones 1.2.1 en el espacio  $\mathcal{X} \subset \mathbb{R}^d$ . Se considera el estimador  $\hat{\theta}^n$  que minimiza a la función de estimación  $J_n(\theta)$  del modelo no lineal descrito en 1.1 con errores aleatorios  $Z_i$ , tal que  $E[Z_i^2] = \sigma^2(X_i)$  para cada  $X \in \mathcal{X}$ . Se asume que se satisfacen los supuestos  $H_1, H_2$  y  $H_3$ , además dada la condición de estabilidad

$$\int_{\mathcal{X}} \omega(X) [f(X, \theta) - f(X, \bar{\theta})]^2 \xi(dX) = 0 \Leftrightarrow \theta = \bar{\theta}$$

Por lo cual se concluye que  $\hat{\theta}^n \rightarrow \bar{\theta}$  c.s.

El resultado anterior se verifica mediante el siguiente

#### TEOREMA 7:

Si  $\hat{\theta}^n$  es un estimador de mínimos cuadrados de  $\theta$  para un modelo no lineal, como el descrito en 1.1, entonces es un estimador fuertemente consistente de  $\theta$  ■

#### 2.4. NORMALIDAD ASINTÓTICA DEL ESTIMADOR $\hat{\theta}^n$

La teoría expuesta hasta este momento, permite establecer la normalidad asintótica que cumple el estimador de mínimos cuadrados de parámetros  $\theta$ . Se considera para ello la convergencia en distribución normal a una variable aleatoria  $\vartheta$ , la cual se denota como " $\xrightarrow{d} \vartheta$ ". Formalmente, la definición de normalidad asintótica se expone a través del siguiente

#### TEOREMA 8

Sea  $\{X_i\}$  un diseño discreto asintótico o un diseño aleatorizado en el sentido de las definiciones 1.2.1 en el espacio  $\mathcal{X} \subset \mathbb{R}^d$ . Se considera el estimador  $\hat{\theta}^n$  que minimiza a la función de estimación  $J_n(\theta)$  del modelo no lineal descrito en 1.1 con errores aleatorios  $Z_i$ , tal que  $E[Z_i^2] = \sigma^2(X_i)$  para cada  $X \in \mathcal{X}$ . Se asume que se satisfacen los supuestos  $H_1, H_2$  y  $H_3$ , además dada la condición de estabilidad

$$\int_{\mathcal{X}} \omega(X) [f(X, \theta) - f(X, \bar{\theta})]^2 \xi(dX) = 0 \Leftrightarrow \theta = \bar{\theta}$$

Y la matriz de información  $M_1(\xi, \bar{\theta})$ , no singular, definida como

$$M_1(\xi, \bar{\theta}) = \int_{\mathcal{X}} \omega(X) \frac{\partial f(X, \theta)}{\partial \theta} \Big|_{\bar{\theta}} \frac{\partial f(X, \bar{\theta})}{\partial \theta^T} \Big|_{\bar{\theta}} \xi(dX),$$

Entonces  $\hat{\theta}^n$  satisface la convergencia en distribución normal a una variable aleatoria  $\vartheta$ , descrita como

$$\sqrt{n} (\hat{\theta}^n - \bar{\theta}) \xrightarrow{d} \vartheta \sim \mathcal{N} \left( 0, M(\omega, \xi, \bar{\theta}) \right), \quad n \rightarrow \infty.$$

Donde

$$M(\omega, \xi, \bar{\theta}) = M_1^{-1}(\xi, \bar{\theta}) M_2(\xi, \bar{\theta}) M_1^{-1}(\xi, \bar{\theta})$$

$$M_2(\xi, \theta) = \int_x \omega^2(X) \sigma^2(X) \frac{\partial f(X, \theta)}{\partial \theta} \frac{\partial f(X, \bar{\theta})}{\partial \theta^T} \xi(dX).$$

### 2.4.1. EJEMPLO

Con el ejemplo del modelo 1.21 se propone estudiar la normalidad asintótica del estimador de mínimos cuadrados, de manera que

$$S_n(\hat{\theta}^n) - S_n(\theta) = (\hat{\theta}^n - \theta) S_n(\bar{\theta})$$

Si  $S_n(\hat{\theta}^n) \rightarrow 0$ , implica que  $\hat{\theta}^n - \theta = -\frac{S_n(\theta)}{S_n(\bar{\theta})}$ .

Como  $\hat{\theta}^n \rightarrow \theta$ , de acuerdo con el teorema de consistencia de  $\hat{\theta}^n$ , entonces para  $S_n(\bar{\theta})$ , por el desarrollo de Taylor, se tiene que

$$S_n(\bar{\theta}) = 8\pi^2 \left\{ \sum_{i=1}^n X_i (\text{sen}(2\pi X_i \bar{\theta}) - \cos^2(2\pi X_i \bar{\theta})) + Z_i \cos(2\pi X_i \bar{\theta}) + \cos(2\pi X_i \bar{\theta}) \cos(2\pi X_i \theta) \right\}$$

Por lo que  $S_n(\theta) = 4\pi \sum_{i=1}^n Z_i X_i \text{sen}(2\pi X_i \theta)$  y la varianza respecto  $S_n(\theta)$  se escribe como

$$\text{Var} \left( \frac{1}{n^{3/2}} S_n(\theta) \right) = \sigma^2 16\pi^2 \frac{1}{n^{3/2}} \sum_{i=1}^n X_i^2 \text{sen}^2(2\pi X_i \theta)$$

Así  $\text{Var} \left( \frac{1}{n^{3/2}} (\hat{\theta}^n - \theta) \right) = \frac{\text{var}(n^{-3/2} S_n(\theta))}{(S_n(\bar{\theta}))^2}$ . De manera que se puede concluir:

$$\frac{1}{n^{3/2}} (\hat{\theta}^n - \theta) \xrightarrow{d} \vartheta \sim \mathcal{N} \left( 0, \frac{1}{4k\pi^2} \sigma^2 \right)$$

Donde

$$k = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^3} \sum_{i=1}^n X_i^2 \text{sen}^2(2\pi X_i \theta) \blacksquare$$

Luego, tiene lugar la normalidad asintótica del estimador  $\hat{\theta}^n$ .

## 2.5. DIFICULTADES ASINTÓTICAS CAUSADAS POR DISEÑOS SINGULARES

Hasta el momento se ha expuesto que existen problemas de estimación de parámetros desconocidos en la teoría asintótica cuando se trabaja

con diseños singulares. El siguiente ejemplo ilustra las irregularidades asintóticas que determinan la inconsistencia del estimador de mínimos cuadrados al ser el diseño de experimento singular.

**2.5.1. EJEMPLO: MODELO DE DECAIMIENTO DE MALINVAUD [1970]**

En econometría, la “teoría del desequilibrio” entre el salario y precio de bienes que se pueden percibir, es modelada mediante la siguiente ecuación

$$Y_i = e^{-\theta X_i} + Z_i, \quad i = 1, 2, \dots, n$$

Donde  $\theta \in \Theta$  es un subconjunto finito en  $(0, 2\pi)$ ,  $X_i$  representa el conjunto de factores que inciden en el ajuste de salario y precio de productos y  $Z_i$ , son los errores aleatorios independientes con distribución normal.

En este caso

$$[D_n(\hat{\theta}^n, \bar{\theta})] = \sum_{i=1}^n (e^{-\theta X_i} - e^{-\bar{\theta} X_i})^2$$

El límite de la matriz de dispersión sería

$$\lim_{n \rightarrow \infty} D_n(\hat{\theta}^n, \bar{\theta}) = \frac{e^{-2\bar{\theta}^n}}{1 - e^{-2\bar{\theta}^n}} + \frac{e^{-2\bar{\theta}}}{1 - e^{-2\bar{\theta}}} - \frac{2e^{-(\bar{\theta}^n + \bar{\theta})}}{1 - e^{-(\bar{\theta}^n + \bar{\theta})}} < \infty$$

Debido a que  $\lim_{n \rightarrow \infty} D_n(\hat{\theta}^n, \bar{\theta}) < \infty$  y conforme al Teorema 2 (parte ii), se concluye que el estimador  $\hat{\theta}^n$  en el modelo de Malinvaud, no es consistente, en este sentido  $\hat{\theta}^n \not\rightarrow \bar{\theta}$ .

De acuerdo con el teorema 4

$$\int_x \omega(X) [e^{-\theta X} - e^{-\bar{\theta} X}]^2 \xi(dX) \neq 0$$

Por lo que la condición de estimabilidad  $i$  de 2.3 no es satisfecha.

La dificultad aquí expuesta es posible solucionarla basando el modelo en una generalización del criterio C- óptimo, respecto al diseño  $\xi(X, \theta)$ . En este sentido se implementa la inclusión de una función escalar definida sobre el estimador de mínimos cuadrados,  $h(\hat{\theta}^n)$ , de manera que

$$\Phi_c[\xi, h(\theta)] = \begin{cases} C_{h(\theta)}^T M^{-1} C_{h(\theta)} & \leftrightarrow C_{h(\theta)} \in \mathcal{M}(M(\xi, \theta)) \\ \infty & \text{otro caso} \end{cases}$$

Donde

$$C_{h(\theta)} = \frac{\partial h(\theta)}{\partial \theta} \Big|_{\theta^\#} \text{ y } \theta^\# = \left\{ \theta \in \Theta : \int_{\mathcal{X}} [f(X, \theta) - f(X, \bar{\theta})]^2 \xi(dX) = 0 \right\}$$

### 2.5.2. PROPIEDADES ASINTÓTICAS DE LA FUNCIÓN $h(\hat{\theta}^n)$ .

El interés que ahora se tiene es sobre la dotación de propiedades asintóticas para una función  $h(\theta)$  de parámetros  $\theta$  tomada para un modelo de regresión no lineal cuando su diseño de experimento involucra una matriz de información singular. Se presentan supuestos sobre la superficie que limita las expectativas del modelo y de la función

$$h(\cdot): \theta \rightarrow \mathbb{R}$$

Que son suficientes para asegurar la normalidad asintótica del estimador de mínimos cuadrados de  $h(\theta)$ .

#### Formulación del problema de estimación

Se considera un diseño  $\zeta(X, h(\theta))$  que minimice la varianza asintótica de  $h(\theta)$ , es decir

$$\zeta(X, h(\hat{\theta}^n)) \in \arg \min \sigma^2(h(\theta))$$

Lo cual equivale a minimizar

$$\left[ \frac{\partial h(\theta)}{\partial \theta^T} \Big|_{\theta^\#} \right] M^{-1}(\xi, \theta^\#) \left[ \frac{\partial h(\theta)}{\partial \theta} \Big|_{\theta^\#} \right]$$

Para abordar la solución al problema de estimación en 1.22 se presenta inicialmente el siguiente teorema, formulado por Lehmann (1998), el cual es conocido como EL MÉTODO DELTA.

#### TEOREMA 9.

Sea  $\{\hat{\theta}^n\}$  una sucesión de variables aleatorias de  $\theta$  que satisface  $\hat{\theta}^n \xrightarrow{p} \bar{\theta} \in \text{int}(\Theta)$ , tal que existe una vecindad respecto a parámetros del diseño,  $V(\xi, \bar{\theta})$ . Sea, además, una función  $h(\cdot): \theta \rightarrow \mathbb{R}$ , continua, doblemente diferenciable, con  $\frac{\partial h(\theta)}{\partial \theta} \neq 0$  y el cumplimiento de la convergencia en distribución

$$\sqrt{n}(\hat{\theta}^n - \bar{\theta}) \xrightarrow{p} v \sim \mathcal{N}[0, V(\xi, \bar{\theta})], n \rightarrow \infty$$

Para alguna matriz  $V(\xi, \bar{\theta}) \in \mathcal{M}[M(\xi, \theta)]$ . Entonces

$$\sqrt{n}(\hat{\theta}^n - \bar{\theta}) \xrightarrow{d} \zeta(X, h(\hat{\theta}^n)) \sim \mathcal{N}\left(0, \frac{\partial h(\theta)}{\partial \theta^T} \Big|_{\bar{\theta}} V(\xi, \bar{\theta}) \frac{\partial h(\theta)}{\partial \theta} \Big|_{\bar{\theta}}\right),$$

$$n \rightarrow \infty$$

Nota: Este teorema no es válido en el caso que  $\frac{\partial h(\theta)}{\partial \theta} = 0$ .

Del teorema anterior se establecen los siguientes supuestos asintóticos para definir la normalidad de  $h(\hat{\theta}^n)$ .

**$H_{1h}$ :** La función  $h(\cdot)$  es continua y tiene derivada de orden 2 en el interior de  $\Theta$ .

**$H_{2h}$ :** Dados  $(\theta, \bar{\theta}) \in \theta^\#$ , entonces existe una vecindad  $V(\theta^\#)$ , tales que para todo  $\theta \in V(\theta^\#)$ , se cumple que  $\text{ran}[M(\xi, \theta)] = \text{ran}[M(\xi, \theta^\#)]$ .

**$H_{3h}$ :** En  $\theta^\#$  están definidas las funciones  $h(\cdot)$ , con derivadas  $\frac{\partial h(\cdot)}{\partial \theta} \neq 0$ .

### Definición de Normalidad Asintótica Regular

Se dice que la sucesión  $\{h(\hat{\theta}^n)\}$  satisface la propiedad de normalidad asintótica regular cuando  $\sqrt{n}(\hat{\theta}^n - \bar{\theta})$  converge en distribución a un vector con media cero y varianza

$$\sigma^2 \left[ \frac{\partial h(\theta)}{\partial \theta^T} M^{-1}(\xi, \theta) \frac{\partial h(\theta)}{\partial \theta} \right]_{\theta = \bar{\theta} \in \theta^\#}, n \rightarrow \infty.$$

Donde

$$M(\xi, \theta) = \frac{1}{\sigma^2} \int_{\mathcal{X}} \frac{\partial f(\theta)}{\partial \theta} \frac{\partial \mathbb{X}(\theta)}{\partial \theta^T} \xi(dX)$$

El siguiente teorema asegura la normalidad asintótica regular para la función  $h(\hat{\theta}^n)$ , cuando el espacio de diseños  $\mathcal{X}$  es finito.

### TEOREMA 10: NORMALIDAD ASINTÓTICA

Sea  $\{X_i\}$  un diseño asintóticamente discreto, sobre un espacio de diseños  $\mathcal{X} \subset \mathbb{R}^d$ , siendo el límite del diseño  $\xi$ , singular. Se asume el cumplimiento de los supuestos  $H_{1h}$ ,  $H_{2h}$ ,  $H_{3h}$  y las condiciones de estimabilidad establecidas 2.3.1., además que el estimador de parámetros,  $\hat{\theta}^n$ , es consistente fuertemente. Entonces la función de estimación  $h(\hat{\theta}^n)$ , satisface

$$\sqrt{n}[h(\hat{\theta}^n) - h(\bar{\theta})] \xrightarrow{d} \zeta(X, h(\hat{\theta}^n)) \sim \mathcal{N}\left(0, \frac{\partial h(\theta)}{\partial \theta^T} \Big|_{\bar{\theta}} M^-(\xi, \bar{\theta}) \frac{\partial h(\theta)}{\partial \theta} \Big|_{\bar{\theta}}\right),$$
$$n \rightarrow \infty$$

La matriz  $M^-(\xi, \bar{\theta})$ , corresponde a la matriz de información generalizada o matriz de Penrose (llamada  $g$  - inversa), cuya escogencia es arbitraria.

## Referencias Bibliográficas

Lehmann, A. C. (1998). Elements of Large Sample Theory. Springer.

Prinzato, L. & Zhigljavsky, A. (2009). Optimal Design and Related Areas in Optimization and Statistics. Springer, 224.

# **GENERALIDADES DE MODELOS LINEALES NO PERTURBADOS**

---

**Alexander Salas Moreno\***

**José Carmona\*\***

**Shirley Sarmiento\*\*\***

---

\* Licenciado en matemáticas y Física, Magister en Matemáticas, Docente Vinculado al Magisterio, Colombia, [algebranet@gmail.com](mailto:algebranet@gmail.com)

\*\* Ingeniero de Sistemas, Magister en Dirección Estratégica en Tecnologías de la Información, Profesor tiempo completo Corporación Universitaria Americana, Colombia, [jcarmona@coruniamericana.edu.co](mailto:jcarmona@coruniamericana.edu.co).

\*\*\* Licenciada en Matemáticas y Física, especialista en Estudios Pedagógicos, Profesora tiempo completo Corporación Universitaria Americana, Colombia, [shsarmiento@coruniamericana.edu.co](mailto:shsarmiento@coruniamericana.edu.co).

## Resumen

En el presente capítulo se analiza el comportamiento asintótico de un modelo no lineal de regresión cuando se incluye una función infinitesimal  $\mu(X_i, \theta)$ . Además se formula el teorema que reafirma la normalidad asintótica del estimador cuando el modelo ha sido perturbado por la función  $\mu$ .

**Palabras clave:** Teoría asintótica, modelos lineales, perturbación.

## CARACTERÍSTICAS ASINTÓTICAS DEL MODELO NO LINEAL PERTURBADO

Las observaciones de un modelo no lineal perturbado son expresadas a través de la ecuación

$$Y(X_i, \theta) = f(X_i, \theta) + \alpha_n \mu(X_i, \theta) + Z_i, \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

Donde  $f(X_i, \theta)$  representa una función no lineal en los parámetros  $\theta$ ,  $\mu(X_i, \theta)$  es una función infinitesimal de la forma

$$\mu(\cdot, \cdot) : \mathcal{X} \times \Theta \rightarrow \mathbb{R}$$

Con  $\theta \in \Theta \subset \mathbb{R}^d$ ,  $\mu(X_i, \theta)$  es una función no lineal respecto a  $\theta$ ,  $\alpha_n$  es una sucesión de vectores aleatorios  $X_1, X_2, \dots, X_n$  que depende del tamaño de la muestra  $n$  y  $Z_i$ , son los errores aleatorios, independientes, que cumplen con las condiciones de Markov. Sin pérdida de generalidad, se llamará a la función  $\alpha_n \mu(X_i, \theta)$  la perturbación o “ruido” del modelo no lineal y a  $\theta^*$ , el conjunto de parámetros desconocidos de dicho modelo

### Condiciones de estimabilidad de $\theta^*$

Nuevamente se redefinen las condiciones de estimabilidad enunciadas en 1.18, 1.19 y 1.20 para la función de perturbación  $\mu(X_i, \theta^*)$ , considerando naturalmente los supuestos  $H_{1\mu}, H_{2\mu}, H_{3\mu}$  y  $H_{4\mu}$ :

$$i_{\mu} : \int_{\mathcal{X}} [f(X, \bar{\theta}) + \alpha_n \mu(X, \bar{\theta}) - f(X, \theta^*) - \alpha_n \mu(X, \theta^*)]^2 \xi(dx) = 0 \Leftrightarrow \theta^* = \bar{\theta}$$

Donde  $\bar{\theta}$  es el verdadero valor de parámetros desconocidos y  $\theta^*$  el vector de parámetros desconocidos del modelo no lineal perturbado.

$ii_{\mu}$  : La matriz de dispersión, respecto a  $\theta^*$  y  $\bar{\theta}$  se define como

$$D(\theta^*, \bar{\theta}) = \sum_{i=1}^n [f(X_i, \theta^*) + \alpha_n \mu(X_i, \theta^*) - f(X_i, \bar{\theta}) - \alpha_n \mu(X_i, \bar{\theta})]^2$$

$iii_{\mu}$  : Definido  $T_n(\theta^*) = \sum_{i=1}^n [Y(X_i) - f(X_i, \theta^*) - \alpha_n \mu(X_i, \theta^*)]$ , entonces para un  $\delta > 0$  y  $\|\theta^* - \bar{\theta}\| > \delta$ , se cumple que

$$\inf [T_n(\theta^*) - T_n(\bar{\theta})] > 0.$$

Los dos lemas que se muestran a continuación son importantes para

establecer la estimabilidad del parámetro  $\theta^*$ , lo mismo que la formulación del teorema que asegura la consistencia del estimador de mínimos cuadrados del parámetro.

**LEMA 5:**

Sea  $\{X_i\}$  una secuencia de vectores que converge fuertemente a un diseño  $\xi$  en el sentido de la definición 1.2.1. Se asume que  $\mu(X, \theta)$  es una función infinitesimal limitada en  $\mathcal{X} \times \Theta$  y  $\{\alpha_i\}$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$  una sucesión de vectores aleatorios que depende del tamaño de la muestra  $n$ . Entonces

$$\lim_n \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \alpha_k \mu(X_k, \theta) = \mathbb{E}\{\alpha_1\} \sum_{k=1}^n \mu(X_k, \theta) \xi(\{X_i\}),$$

Casi seguro, con respecto a  $\alpha_1, \alpha_2, \dots$ , uniformemente en  $\Theta$ .

**DEMOSTRACIÓN**

Se establece la desigualdad

$$\begin{aligned} & \left| \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \alpha_k \mu(X_k, \theta) - \mathbb{E}\{\alpha_1\} \sum_{k=1}^n \alpha_k \mu(X_k, \theta) \xi(\{X_k\}) \right| \leq \\ & \leq \left| \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \alpha_k \mu(X_k, \theta) \right| + \sum \sup |\mu(X, \theta)| \frac{n(X)}{n} \left( \frac{1}{n(X)} \sum_{k=1}^n \alpha_k \right) - \\ & \mathbb{E}\{\alpha_1\} \xi(\{X\}) \quad (1.22) \end{aligned}$$

En el cual  $\frac{n(X)}{n}$  representa la función relativa del vector  $X$  en la secuencia  $X_1, X_2, \dots, X_n$ . Además, ocurre que  $\sum_{k=1}^n \alpha_k \rightarrow 0$ , casi seguro y uniformemente en  $\Theta$ .

Del lado derecho de la desigualdad en 1.22, se obtiene:

$$\sup |\mu(X, \theta)| \frac{n(X)}{n} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \alpha_k \rightarrow 0,$$

Lo cual implica que:

$$\left| \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \alpha_k \mu(X_k, \theta) - \mathbb{E}\{\alpha_1\} \sum_{k=1}^n \alpha_k \mu(X_k, \theta) \xi(\{X_k\}) \right| \rightarrow 0$$

**LEMA 6:**

Dada  $\{X_i\}$ , una secuencia de vectores aleatorios de  $\mathbb{R}^n$  y  $\mu(X, \theta)$  una función infinitesimal, real, limitada en  $\mathbb{R}^d \times \Theta$ , continua en  $\theta \in \Theta$  y  $\Theta$ , un subconjunto compacto en  $\mathbb{R}^d$ . Se asume que

$$\mathbb{E} \left\{ \max_{\theta \in \Theta} |\mu(X_1, \theta)| \right\} < \infty.$$

Entonces:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \mu(X_i, \theta) = \mathbb{E}\{\mu(X_1, \theta)\} \text{ casi seguro y uniformemente en } \Theta.$$

## DEMOSTRACIÓN

La prueba presentada es constructiva y representada por Biekens.

Se escoge un  $\theta_1$ , fijo en  $\Theta$  y se toma el conjunto de Borel,

$$\mathcal{B}(\theta, \delta) = \{\theta \in \Theta: \|\theta - \theta_1\| \leq \delta\}.$$

Se definen  $\overline{\mu_\delta(X)}$  y  $\underline{\mu_\delta(X)}$  como el máximo y mínimo, respectivamente, de  $\mu(X, \theta)$  sobre el conjunto  $\mathcal{B}(\theta, \delta)$ . Como  $\mu(X, \theta)$  es una función limitada, entonces

$$\overline{\mu_\delta(X)} < \infty \text{ y } \underline{\mu_\delta(X)} < \infty.$$

Por lo que se concluye que  $\mathbb{E} \left\{ \max_{\theta \in \Theta} |\mu(X_1, \theta)| \right\} < \infty$ . ■

De los lemas 5 y 6 es posible obtener los siguientes **supuestos asintóticos** para un modelo no lineal perturbado:

**$H_{1\mu}$**  : Si  $\Theta$  es un subconjunto compacto en  $\mathbb{R}^d$ , entonces  $\theta^* \in \Theta \subset \overline{\text{int}(\Theta)}$  y la función  $\mu(X_i, \theta^*)$  es doblemente y continuamente diferenciable en  $\Theta$ .

**$H_{2\mu}$**  : La sucesión  $\alpha_n$  depende del tamaño de la muestra  $n$  y

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n} \alpha_n = 0$$

## Estimador de mínimos cuadrados

Se identifica el estimador de mínimos cuadrados del conjunto de parámetros desconocidos  $\theta^*$ , en un modelo no lineal perturbado, como  $\hat{\theta}^{n*}$ , a quien se aplica el criterio sobre la condición de optimalidad dado por **iii $_{\mu}$** .

Con base en los lemas 5 y 6 se formula el teorema que plantea el problema de estimación de  $\theta^*$ , así mismo, dicho teorema se toma como base para asegurar la consistencia del estimador de este parámetro.

**TEOREMA 11:**

Sea  $\{X_i\}$  una secuencia de vectores aleatorios e independientes, que converja fuertemente a  $\xi$ , en el sentido de la definición 1.2.1. Las funciones  $f(X_i, \theta^*)$  y  $\mu(X_i, \theta^*)$  son continuas en  $\Theta$ , para todo  $X$  en  $\mathcal{X}$ . Entonces para la secuencia de vectores  $\{\hat{\theta}^{n*}\}$ , con probabilidad 1, dado por

$$\hat{\theta}^* \in \operatorname{argmín} T_n(\theta^*, Y_n) \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

Son elementos del conjunto  $\Theta^\# = \operatorname{argmín} T(\theta^*)$ , donde

$$T(\theta^*) = \int_{\mathcal{X}} [f(X, \bar{\theta}) + \mu(X, \bar{\theta}) - f(X, \theta^*) - \mu(X, \theta^*)] \xi(dX) + \sigma^2$$

**DEMOSTRACIÓN**

Por los lemas 5 y 6, anteriormente ilustrados, se cumple que

$$\begin{aligned} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n [Y(X_k, \theta^*) - f(X_k, \theta^*) - \mu_k(X_k, \theta^*)]^2 \\ = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n Z_k^2 + \frac{2}{n} \sum_{k=1}^n [f(X_k, \bar{\theta}) - \\ - f(X_k, \theta^*)] Z_k + \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n [f(X_k, \bar{\theta}) - f(X_k, \theta^*)]^2 \end{aligned}$$

Donde  $Z_k = Y(X_k, \theta^*) - f(X_k, \theta^*) - \alpha_k \mu_k(X_k, \theta^*)$ .

El término del miembro izquierdo de la expresión anterior converge, casi seguro, a  $\sigma^2$ , por la **Ley General de los Grandes Números**.

Como es requerido en el lema 5, la diferencia  $f(X_k, \bar{\theta}) - f(X_k, \theta^*)$  es limitada en  $\mathcal{X} \times \Theta$ , entonces:

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n [f(X_k, \bar{\theta}) - f(X_k, \theta^*)] Z_k \\ = \sum_{k=1}^n [f(X_k, \bar{\theta}) - f(X_k, \theta^*)] \xi(\{X_k\}) \mathbb{E}\{Z_k\} = 0 \end{aligned}$$

Casi seguro y uniformemente en  $\Theta$ .

Por el lema 6, se obtiene, entonces:

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n [f(X_k, \bar{\theta}) - f(X_k, \theta^*)] Z_k \\ = \mathbb{E}\{f(X_k, \bar{\theta}) - f(X_k, \theta^*)\} \mathbb{E}\{Z_1\} = 0. \end{aligned}$$

Nuevamente, casi seguro y uniformemente en  $\Theta$ . Por estos argumentos se verifica que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n [f(X_k, \bar{\theta}) - f(X_k, \theta^*)]^2 = \int_{\mathcal{X}} [f(X, \bar{\theta}) - f(X, \theta^*)]^2 \xi(dX)$$

Casi seguro, uniformemente en  $\Theta$ . De aquí se concluye que

$$\{T_n(\theta^*)\}_n \xrightarrow{c.s.} T(\theta^*), \text{ uniformemente en } \Theta.$$

Por lo que, si  $\theta^\# = \lim_{n \rightarrow \infty} \{T_n(\theta^*, Y_n)\}$ . Entonces  $\theta^\# \xrightarrow{c.s.} T(\theta^*)$ . De esta manera:

$$\theta^\# \xrightarrow{c.s.} \theta^* \text{ y } \theta^\# \in \Theta^\# \blacksquare$$

Como consecuencia del teorema anterior se formulan dos supuestos asintóticos de gran importancia para la consistencia del teorema del estimador de mínimos cuadrados para un modelo no lineal perturbado.

**$H_{3\mu}$**  :  $f(X_i, \theta^*)$  y  $\mu(X_i, \theta^*)$  son funciones continuas en  $\Theta$ , para cualquier  $X$  en  $\mathcal{X}$ .

**$H_{4\mu}$**  :  $\frac{\partial f(X_i, \theta^*)}{\partial \theta^*}$  y  $\frac{\partial \mu(X_i, \theta^*)}{\partial \theta^*}$  son funciones continuas y acotadas en  $\Theta$ .

### 3.2. CONSISTENCIA DE LA FUNCIÓN DEL ESTIMADOR $\hat{\theta}^*$

Para formular el teorema de la consistencia del estimador  $\hat{\theta}^*$  del modelo no lineal perturbado se supone satisfecha la condición de estimabilidad  $i_\mu$ . Además, las propiedades de la función escalar  $h(\cdot)$ , desarrolladas en el capítulo anterior, son utilizadas también para ampliar el teorema de consistencia a **matrices singulares**, objetos de estudio del presente trabajo de grado.

#### TEOREMA 12: CONSISTENCIA DEL ESTIMADOR $\hat{\theta}^*$

Dada la función escalar  $h(\cdot)$  y el cumplimiento de todas sus propiedades anteriormente señaladas, entonces  $\forall \theta^* \in \Theta$ , se tiene que:

$$\int_{\mathcal{X}} [f(X, \theta^*) + \alpha_n \mu(X, \theta^*) - f(X, \bar{\theta}) - \alpha_n \mu(X, \bar{\theta})] \xi(dX) = 0$$

$$\Leftrightarrow h(\theta^*) = h(\bar{\theta})$$

Por lo cual  $h(\hat{\theta}^*) \xrightarrow{c.s.} h(\bar{\theta})$ , cuando  $n \rightarrow \infty$ .

## DEMOSTRACIÓN

Se considera el conjunto

$$\theta^\# = \left\{ \theta^* \in \Theta \right. \\ \left. : \int_X [f(X, \theta^*) + \alpha_n \mu(X, \theta^*) - f(X, \bar{\theta}) - \alpha_n \mu(X, \bar{\theta})] \xi(dX) \right. \\ \left. = 0 \right\}$$

De acuerdo con el Teorema de Consistencia para el estimador  $\hat{\theta}$  y el lema 4, entonces

$\hat{\theta}^*$  converge a  $\theta^\#$ , es decir,  $\hat{\theta}^* \xrightarrow{c.s.} \theta^\#$ .

De la continuidad de  $h(\cdot)$ , se sigue que todos los puntos de  $h(\hat{\theta}^*)$  convergen, casi seguro a  $h(\theta^\#)$ . Se concluye que

$$h(\theta^\#) \xrightarrow{c.s.} h(\bar{\theta})$$

De tal manera que

$$h(\hat{\theta}^*) \xrightarrow{c.s.} h(\bar{\theta}) \blacksquare$$

## Normalidad asintótica del estimador de mínimos cuadrados en un modelo no lineal perturbado

Finalmente se llega a la conclusión más importante del presente trabajo de grado: La estabilidad asintótica del estimador de mínimos cuadrados para el modelo no lineal perturbado, el cual queda demostrado mediante el siguiente teorema de Normalidad Asintótica.

### TEOREMA 13: NORMALIDAD ASINTÓTICA DEL ESTIMADOR $\hat{\theta}^*$

Sea la secuencia  $\{X_i\}$  convergente a  $\xi$  en el sentido de la definición 1.2.1. Se supone, además que las funciones  $f(X_i, \theta^*)$ ,  $\mu(X_i, \theta^*)$ ,  $\alpha_n$  y  $h(\theta^*)$  cumplen con las propiedades anotadas en los apartados anteriores y satisfacen todos los supuestos allí referenciados, entonces para el estimador  $\hat{\theta}^*$ , definido para el **modelo no lineal perturbado**, la secuencia  $\sqrt{n}[h(\hat{\theta}^*) - h(\bar{\theta})]$  converge, en distribución a una magnitud aleatoria distribuida de la forma  $\zeta(X, h(\hat{\theta}^*))$ , para lo cual se escribe

$$\sqrt{n}[h(\hat{\theta}^*) - h(\bar{\theta})] \xrightarrow{d} \zeta(X, h(\hat{\theta}^*)) \sim \mathcal{N} \left( 0, \frac{\partial h(\theta^*)}{\partial \theta^*} \Big|_{\bar{\theta}} M^{-1}(\xi, \bar{\theta}) \frac{\partial h(\theta^*)}{\partial \theta^*} \Big|_{\theta^* = \bar{\theta}} \right).$$

Cuando  $n \rightarrow \infty$ , donde la elección de la matriz g- inversa,  $M^-(\xi, \bar{\theta})$ , es arbitraria.

### DEMOSTRACIÓN CONSTRUCTIVA

Como es el en sentido de la definición 1.2.1, entonces existe un diseño  $\xi$  en  $\mathcal{X}$ , tal que

$$S_\xi = \{X \in \mathcal{X} : \xi(\{X\}) > 0\} \text{ y } \lim_{n \rightarrow \infty} \xi_n(\{X\}) = \xi(\{X\}) \text{ para todo } X \in \mathcal{X}$$

De acuerdo con el supuesto  $H_3$ , la función  $f(\cdot, \cdot)$  es doblemente continua y diferenciable en  $\Theta$ , luego, para esta función es considerado en el espacio de Hilbert,  $\mathcal{L}_2(\xi)$ , un operador lineal  $P_\theta$  que actúa sobre algún funcional  $\Phi$ , de manera que:

$$(P_\theta \Phi)(X) = f_\theta^T(X)M^+(\xi, \theta) \int_{\mathcal{X}} f_\theta^T(X) \Phi(X)\xi(dX) \quad (1.23)$$

Donde  $M^+$  es la matriz de información introducida por Kiefe y Wolfowitz [1959], como

$$M^+(\xi, \theta) = \int_{\mathcal{X}} f_\theta(X) f_\theta^T(X)\xi(dX)$$

Según el supuesto  $H_{3h}$ , en el conjunto  $\theta^\#$  está definida la función  $h(\cdot)$ , con derivadas

$\frac{\partial h(\cdot, \theta)}{\partial \theta} \neq 0$  que da cumplimiento a la convergencia  $\theta \sim \bar{\theta}$  y existe un funcional  $A_\theta$ , continuo y definido en  $\mathcal{L}_2(\xi)$  a  $\mathbb{R}$ , donde  $A_\theta = A_{\bar{\theta}}$  y

$$\frac{\partial h(\theta)}{\partial \theta_i} = A_\theta[\{f_\theta\}_i], i = 1, 2, \dots, p$$

Por la linealidad de  $A_\theta$ , entonces

$$\frac{\partial h(\theta)}{\partial \theta_i} = A_\theta[P_\theta\{f_\theta\}_i], i = 1, 2, \dots, p \quad (1.24)$$

Mediante las ecuaciones 1.23 y 1.24, se tiene

$$\frac{\partial h(\theta)}{\partial \theta_i} = A_\theta \left[ f_\theta^T(X)M^+(\xi, \theta) \int_{\mathcal{X}} f_\theta(X)f_\theta^T(X)\xi(dX) \right]$$

Representando  $\mu(\theta) = f_{\theta_i}^T(X)M^+(\xi, \theta_i)$  y  $\{M(\xi, \theta)\}_i = \int_{\mathcal{X}} f_{\theta_i}(X) f_{\theta_i}^T(X)\xi, (dX)$ , se escribe

$$\frac{\partial h(\theta)}{\partial \theta_i} = \mu^T(\theta) \{M(\xi, \theta)\}_i$$

(Es la parcial de  $h(\theta)$  en su  $i$  – ésima componente)

Además

$$\mu_j(\theta) = A_\theta [f_\theta^T \{M^+(\xi, \theta)\} \cdot j]$$

(Es la componente de  $\mu(\theta)$  en la  $j$  – ésima posición)

Por el Teorema 9 (parte ii), se cumple para  $\theta \in \Theta$

$$\theta \sim \bar{\theta} \rightarrow \mathcal{L}_\theta(\xi) \cong \mathcal{L}_{\bar{\theta}}(\xi)$$

Y para  $\mu^T(\theta) f(\theta)$  se debe cumplir que

$$\mu^T(\theta^\#) f(\theta^\#) \cong \mu^T(\bar{\theta}) f(\bar{\theta})$$

En efecto, para algún funcional  $\Phi$  de  $\mathcal{L}_2(\xi)$ , respecto a  $f_\theta(X)$ , es posible escribir

$$\begin{aligned} \langle P_\theta, \Phi \rangle_{(X)} &= \langle \mu^T(\theta) f(\theta), \Phi \rangle_\xi \\ &= \sum_{j=1}^p A_\theta [f_\theta^T \{M^+(\xi, \theta)\} \cdot j] \\ &= \int_x \{f_\theta(X)\}_j(X) \Phi(X) \xi(dX) \end{aligned}$$

Nuevamente por la linealidad de  $A_\theta$

$$A_\theta [P_\theta, \Phi] = A_\theta \left[ \sum_{j=1}^p f_\theta^T \{M^+(\xi, \theta)\}_j \int_x \{f_\theta(X)\}_j(X) \Phi(X) \xi(dX) \right]$$

Como  $\theta \cong \bar{\theta}$ , se deduce que

$$A_{\bar{\theta}} [P_\theta, \Phi] = \langle \mu^T(\bar{\theta}) f(\bar{\theta}), \Phi \rangle_\xi$$

De acuerdo con el lema 1 y bajo el supuesto asintótico  $H_1$ , la secuencia  $\{\hat{\theta}^n(Y^n)\}_n$  de mínimos cuadrados satisface

$$\hat{\theta}^n(Y^n) \in \arg \min_{\theta \in \Theta} J_n(\theta, Y^n) \quad (1.25)$$

De forma que  $Y^n \{Y(X_1), Y(X_1), \dots, Y(X_n)\}$ .

■ A partir de este espacio se verifican las condiciones de convergencia a una magnitud aleatoria  $\xi$ , con media cero (0) y varianza basada en la función escalar  $h(\cdot)$

Inicialmente el soporte de puntos del diseño  $\xi$  se define como

$$S_\xi = \{X \in \mathcal{X} : \xi(\{X\}) > 0\}.$$

De acuerdo con la condición de estimabilidad 1.18 (parte i) y para algún  $\epsilon > 0$ ,  $\theta^\#$  y  $\theta^* \in S_\xi$ , entonces

$$S_\xi = \{\theta \in \text{int}(\Theta) : \|f(\cdot, \theta^*) - f(\cdot, \bar{\theta})\| < \epsilon\}.$$

Luego:

$$\left[ \frac{\partial \|f(\cdot, \theta^*) - f(\cdot, \theta^\#)\|_\xi^2}{\partial \theta^*} \right] \Big|_{\theta = \theta^\#} = 0 \text{ con } \theta^\# \sim \theta^*$$

Por lo tanto:

$$\|f(\cdot, \theta_i^*) - f(\cdot, \theta_i^\#)\| \xrightarrow{\xi} 0$$

De tal modo que se obtiene

$$f[X_i, \theta^*(Y)] = f[X_i, \bar{\theta}(Y)].$$

Aplicando el Gran Teorema del Límite Central para el modelo no lineal perturbado en este trabajo de grado, se obtiene, en consecuencia que

$$\xi \left( \left\{ X : \left( f(X, \bar{\theta}) + \alpha_n \mu(X_i, \bar{\theta}) \right) = f(X, \theta^*) + \alpha_n \mu(X_i, \theta^*) \right\} \right) = 1.$$

Así:

$$\xi(\{X : \mu^T(\theta^\#(Y)) f(\theta^\#(Y)) = \mu^T(\bar{\theta}) f_{\bar{\theta}}(X)\}) = 1.$$

De tal manera que:

$$-\sqrt{n} \mu^T(\theta^\#) \frac{\partial J_n(\theta^*, Y^n)}{\partial \theta^*} \Big|_{\theta^\#} = \frac{2}{n} \sum_{i=1}^n \mu_i^T(\bar{\theta}) \cdot f_{\bar{\theta}}(X_i) \xi_i.$$

De la independencia de  $X_i$ ,  $\mathbb{E}\{\xi_i\} = 0$  y  $\text{Var}\{\xi_i\} = \sigma^2$ .

Nuevamente, por el Teorema del Límite Central, se debe obtener para el estimador  $\hat{\theta}^*$ , la siguiente convergencia en distribución:

$$-\sqrt{n} \mu^T(\theta^\#) \frac{\partial J_n(\theta^*, Y^n)}{\partial \theta^*} \Big|_{\theta^\#} \xrightarrow{d} v \sim \mathcal{N}(0, 4D).$$

Donde  $D$  es de la distribución normal

$$D = \sigma^2 \mu^T(\bar{\theta}) M(\xi, \bar{\theta}) \mu(\bar{\theta}).$$

Por el Teorema 4

$$\frac{\partial^2 J_n(\theta^*, Y^n)}{\partial \theta^* \partial \theta^{*T}} \sim -2 \int_x [f(X, \bar{\theta}) - f(X, \theta^*)] \frac{\partial^2 f(X, \theta^*)}{\partial \theta^* \partial \theta^{*T}} \xi(dX) + 2M(\xi, \theta^*).$$

Entonces, para  $n \rightarrow \infty$ , se deduce que:

$$\mu^T(\theta^*) \frac{\partial^2 J_n(X, Y^n)}{\partial \theta^* \partial \theta^{*T}} \Big|_{\beta_n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 2\mu^T(\theta^*) M(\xi, \theta^*) = 2 \left[ \frac{\partial h(\theta)}{\partial \theta^{*T}} \right] \Big|_{\theta^*}$$

Luego:

$$2\sqrt{n} \left[ \frac{\partial h(\theta^*)}{\partial \theta^{*T}} \right] \Big|_{\theta^*} (\theta^* - \theta^\#) \xrightarrow{d} v \sim \mathcal{N}(0, 4D).$$

Aplicando de nuevo el desarrollo de Taylor para funciones de primer grado, se obtiene:

$$\begin{aligned} \sqrt{n}[h(\theta^*) - h(\bar{\theta})] &= \sqrt{n} [h(\theta^*) - h(\theta^\#)] \\ &= \sqrt{n} \left[ \frac{\partial h(\theta^*)}{\partial \theta^{*T}} \right] \Big|_{\delta_n(Y)} (\theta^* - \theta^\#) \end{aligned}$$

Cuando  $n \rightarrow \infty$ . Donde  $\delta_n(Y) \xrightarrow{\text{casi seguro}} \theta^\#$ .

Además:

$$\left[ \frac{\partial h(\theta^*)}{\partial \theta^{*T}} \right] \Big|_{\delta_n(Y)} \xrightarrow{\text{c.s.}} \left[ \frac{\partial h(\theta^*)}{\partial \theta^{*T}} \right] \Big|_{\theta^\#}, n \rightarrow \infty$$

Finalmente:

$$\sqrt{n} [h(\theta^*) - h(\bar{\theta})] \xrightarrow{d} \frac{v}{2} \sim \mathcal{N}(0, D), n \rightarrow \infty.$$

Entonces:

$$\frac{\partial h(\theta^*)}{\partial \theta^*} = A_{\theta^*} [P_{\theta^*}, \{f_{\theta^*}\}_i] = \mu^T(\theta^*) \{M(\xi, \theta^*)\}_i$$

La expresión  $\left[ \frac{\partial h(\theta^*)}{\partial \theta^*} \right] \Big|_{\bar{\theta}}$  está en el rango de la matriz  $M(\xi, \bar{\theta})$ , lo que trae como consecuencia que  $D = \sigma^2 \mu^T(\bar{\theta}) M(\xi, \bar{\theta}) \mu(\bar{\theta})$  y

$$D = \sigma^2 \left[ \frac{\partial h(\theta^*)}{\partial \theta^{*T}} \right] M^{-1}(\xi, \theta^*) \left[ \frac{\partial h(\theta^*)}{\partial \theta^*} \right] \Big|_{\bar{\theta}},$$

Para alguna  $g$ -inversa de la matriz de información  $M(\xi, \bar{\theta})$ . ■

# **MODELAMIENTO EN CRIPTOGRAFÍA, ARTICULACIÓN ENTRE EL ÁLGEBRA LINEAL Y LA PROGRAMACIÓN ESTRUCTURADA**

---

**Martha P. Olaciregui L.\***

**Bertha Hernández\*\***

**Rene Ramirez\*\*\***

---

\* Ingeniera de Sistemas, Especialista en Diseño y Construcción de Soluciones Telemáticas, Magister en Magister en Dirección Estratégica en Tecnologías de la Información en empresas de Software, Profesora tiempo completo Corporación Universitaria Americana, Colombia, molaciregui@coruniamericana.edu.co.

\*\* Ingeniera de Sistemas, Especialista en Auditoría de Sistemas, Magister en Educación, Directora del programa de Ingeniería de Sistemas en Corporación Universitaria Americana, Colombia, bhernandez@coruniamericana.edu.co.

\*\*\* Ingeniero de Sistemas, Magister en Educación, Profesor tiempo completo Corporación Universitaria Americana, Colombia, rramirez@coruniamericana.edu.co.

## Resumen

En el programa de Ingeniería de Sistemas de la Corporación Universitaria Americana se vienen desarrollando diferentes estrategias para la enseñanza de las ciencias básicas y las asignaturas de propias de la propuesta académica.

En ese contexto, los procesos investigativos se llevan a cabo mediante proyectos de aulas donde los estudiantes se integran a los mismos mediante trabajos grupales, en los que ponen en práctica los conceptos estudiados en clases y resuelve situaciones que implican una inmersión contextual en las áreas más significativas para su futuro profesional.

En consonancia, de manera sistemática y como elemento diferenciador las matemáticas y se muestran como una rama del conocimiento que se articula de manera armónica con las diferentes contenidos y otras asignaturas que componen el plan de estudios de la Ingeniería de Sistemas.

Por tal motivo, en este documento se da cuenta de una de las experiencias que se llevaron a cabo para generar investigación, motivación y la contextualización de las ciencias básicas.

**Palabras clave:** criptografía, algebra lineal, programación

## **Introducción**

El aprendizaje de las matemáticas ha sido una de las problemáticas más recurrentes en los últimos años a nivel universitario, estudios sobre deserción en los programas de ingeniería dan como resultado que estudiantes de los programas mencionados abandonan los estudios debido al bajo rendimiento que tienen en asignaturas relacionadas con el álgebra y trigonometría, cálculos ecuaciones diferenciales, entre otras.

De acuerdo a investigadores como Alan Bishop (1999), una de las causas por las cuales el aprendizaje de las matemáticas se hace difícil es la forma en que son enseñadas, por lo general con aplicaciones de los conceptos matemáticos con ejemplos y ejercicios que se encuentran descontextualizados de la realidad de los estudiantes, lo cual conlleva desmotivación en el estudio generando posiblemente el bajo rendimiento en asignaturas del ciclo básico de ingeniería.

Por otro lado, la asignatura de algebra lineal que hace parte del ciclo de formación básica de los estudiantes de Ingeniería de Sistemas de la Corporación Universitaria Americana, se presenta por lo general con una área abstracta donde las temáticas son ajenas al contexto tanto ingenieril como de lo cotidiano, este escenario se refleja en dos situaciones, la primera en la poca motivación hacia el estudio de la asignatura y la segunda en lo referente al rendimiento académico en los diferentes cortes en que se evalúa el semestre.

Así mismo, los hechos descritos en el párrafo anterior propenden a un bajo desarrollo de competencias que evidencia a largo plazo en evaluaciones de la calidad de la educación superior, llamadas en Colombia Pruebas Saber Pro, en las cuales el promedio del estudiante de la Corporación que la presentaron estuvo por debajo de la media nacional para el núcleo de razonamiento cuantitativo, el cual agrupa las áreas de ciencias básicas. (Ver gráfico 1)

En el gráfico 1, se muestran los resultados obtenidos por los estudiantes de últimos semestres de Ingeniería de Sistemas en las Pruebas Saber Pro aplicadas en el año 2012. La estructura del examen toma en cuenta núcleos de competencias genéricas; Razonamiento Cuantitativo, Lectura Crítica, Inglés, Escritura y Competencias Ciudadanas. Los resultados de las mismas se interpretan de acuerdo a dos promedios, el primero es el obtenido por

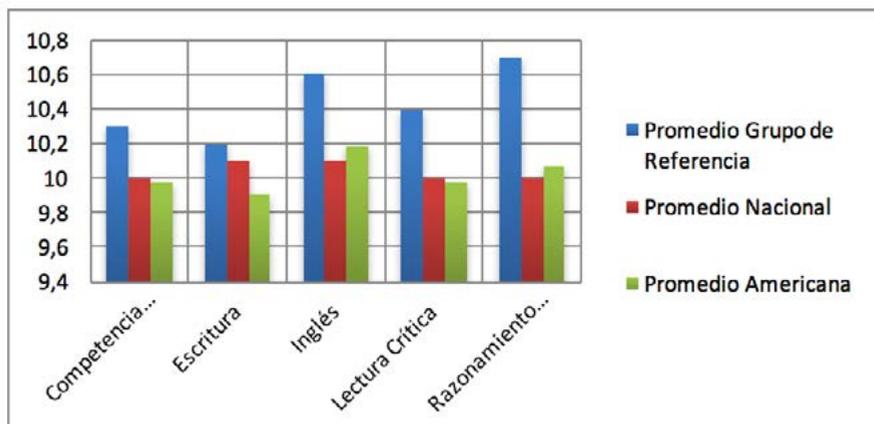


Gráfico 1. Resultados.

Fuente: Instituto Colombiano de Evaluación de la Educación – ICFES -

todos los estudiantes que presentaron la prueba independientemente del programa académico ese es el llamado promedio nacional, el segundo es el del grupo de estudiantes de ingeniería y afines que presentaron la prueba, este es llamado grupo de referencia.

De acuerdo con lo anterior, los estudiantes presentan un nivel de competencias menos al obtenido por el grupo de referencia, estos resultados si bien no reflejan el desarrollo actual de la institución en los procesos educativos, si son un indicador del bajo nivel de desarrollo de competencias y que debe trabajarse al respecto.

De igual forma, los estudiantes de algebra lineal al tiempo desarrollan la asignatura de Programación II, donde se incluyen temas como vectores y matrices, como métodos de ordenación, búsqueda, inserción entre otros, al respecto llama la atención que los cursantes de estas asignaturas presentan problemas de comprensión, motivación y bajo rendimiento académico.

En consecuencia, en compañía de la docente del área se estructuró un proyecto de clase en el cual se aplicarán los temas de matrices desde el punto de vista del algebra lineal y desde la perspectiva de la programación II, el resultado de esta reflexión fue un trabajo formativo en el cual debían diseñar un programa en el lenguaje de programación java, que codificará información mediante el uso del producto e inversa de matrices.

## Desarrollo

El álgebra lineal en su máxima expresión es una rama de las matemáticas que más aplicaciones tiene en las diferentes áreas del conocimiento, sin embargo, muchos de los textos que sirven de guía no se enfocan en la articulación de los temas con la vida cotidiana de los estudiantes que toman estos cursos, en este caso de los estudiantes de ingeniería de sistemas. Por lo general los docentes se apegan fielmente a los temas y la forma en que los libros muestran los diferentes tópicos y temáticas de la materia, en cierto punto traslapan currículo con la pedagogía, situación que no está acorde con el objetivo del ciclo básico de ingeniería el cual es servir de tránsito de conocimiento entre lo científico y la cotidianidad.

De igual forma, los estudiantes de la institución presentan bajo rendimiento en las asignaturas relacionadas con la programación por lo que desde la Decanatura de la Facultad se hizo un llamado para proponer estrategias que permitieran motivar el mejoramiento de los resultados en programación II y que los estudiantes perciban de otra forma el aprendizaje del álgebra lineal.

La propuesta de los docentes de las asignaturas mencionadas en el párrafo anterior fue la tomar un tema central con lo son las matrices y diseñar un programa que permitiera mostrar una de las muchas aplicaciones de las mismas, en este caso se escogió la criptografía.

La criptografía es una de las aplicaciones de las matemáticas, que ha tenido un desarrollo amplio en los últimos años. Luego de la segunda guerra mundial donde fueron usados muchos criptogramas para enviar información cifradas entre los diferentes frentes de batalla, las investigaciones en esta área han proliferado en los países desarrollados y en algunos de América latina.

Por otro lado, una aplicación práctica del álgebra lineal es la relacionada con la encriptación de información por medio de matrices y sus inversas, de esta forma se incentiva el estudio de esta asignatura entre los estudiantes de ingeniería, quienes muchas veces indagan sobre la forma en que pueden aplicar los conocimientos que adquieren en la Universidad en su vida profesional o cotidiana.

Sin embargo, el método de encriptación por medio de matrices se torna un poco extenso debido a la cantidad de operaciones que deben llevarse a

cabo para poder codificar un mensaje. Por lo que se planteó a los estudiantes el diseñar un programa de computación que permita codificar y decodificar la información mediante el uso de la inversa de una matriz

Kerckhoffs recomienda, en su artículo, que los sistemas criptográficos cumplieren las siguientes reglas, que efectivamente han sido adoptadas por gran parte de la comunidad criptográfica, son las siguientes:

Tipos de Secreto	
En criptografía se definen varios niveles de seguridad en los cuales se pueden enmarcar los diferentes algoritmos criptográficos:	
1. <b>Secreto Perfecto:</b>	El mensaje es seguro frente a tiempo y recursos ilimitados. En este tipo de cifrado el tamaño de la clave es mayor o igual que el tamaño del texto a cifrar.
2. <b>Secreto Computacional:</b>	El mensaje es seguro frente a ataques con tiempo y recursos limitados. Ejemplo: Criptosistemas de clave pública.
3. <b>Secreto Probable:</b>	El mensaje se encuentra probablemente seguro. Ejemplo: Criptosistemas de clave privada.
4. <b>Secreto condicional:</b>	La seguridad del mensaje depende de las características de sus entorno. Ejemplo: Un mensaje no cifrado o cifrado utilizando criptosistemas clásicos, que se envía a través de una red "segura".

Gráfico 2: Reglas de Kerckhoffs para la codificación de información.  
Fuente: Tomado de Fernández (2004)

En la actualidad los códigos más usados para la codificación de información son el DES (Data Encryption Standard) escogido por FIPS en los Estados Unidos en 1976, y motivó el concepto moderno del cifrado por bloques y su criptoanálisis.

El método de encriptación mediante matrices se sintetiza de la siguiente manera:

El primer paso es fijar asignar a cada letra alfabeto un número del 1 al 26 iniciando con A=1, luego los caracteres de la frase son reemplazados por los números asignados, de esta manera el mensaje se convierte en una secuencia de números; posteriormente se construye una matriz con la secuencia de los números anteriores de forma tal que se pueda multiplicar por otra matriz que se llamará "matriz candado", es decir, el número de columnas de la matriz formada por la secuencia de números debe tener el mismo número de filas de la matriz candado; el tercer paso es multiplicar las matrices, el resultado obtenido de la multiplicación se coloca en un vector y es el mensaje a enviar.

El programa que los estudiantes debían realizar también incluía la

implementación del proceso contrario, es decir cuando el receptor recibe el mensaje encriptado cómo lo va a decodificar.

Por lo tanto, luego de encriptar el mensaje el siguiente paso era armar la inversa de la matriz candado que se convierte en la matriz llave y luego se multiplica esta por el mensaje recibido, esto arroja una matriz secuencia de números donde a cada uno de los cuales se les asigna una letra y de esta manera decodificar el mensaje enviado.

La asignación del trabajo se hizo usando la plataforma educativa Moodle y los resultados se expusieron por parte de los estudiantes, la calificación obtenida era válida para las dos asignaturas.

## **Resultados**

Los resultados obtenidos fueron los siguientes:

Los estudiantes se mostraron interesados en las temáticas de tal forma que muchos se vincularon a los semilleros de investigación de las Facultad, así mismo, se motivaron en el trabajo en equipo y manifestaron que el aprendizaje fue más efectivo que cuando se usaron metodologías tradicionales de solo ejercicios y explicación por parte del docente.

De igual forma, el rendimiento académico del estudiante tuvo una gran mejoría los cual da elementos de análisis y de continuidad con estrategias que integren el álgebra lineal con la programación II en los siguientes semestres académicos.

A continuación, se muestran dos imágenes de uno de los programas desarrollados por los estudiantes en lenguaje de programación Java.

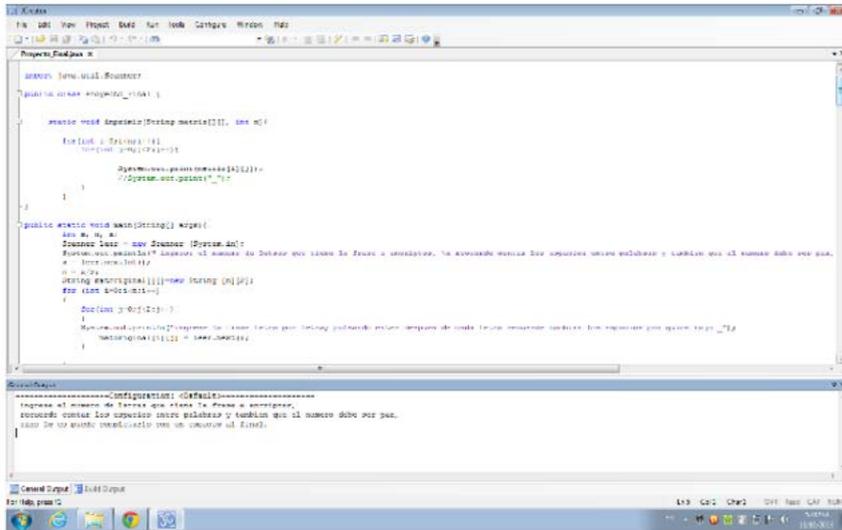


Imagen 1: Pantalla que muestra parte del código fuente del programa  
Fuente: Tomada por el autor.

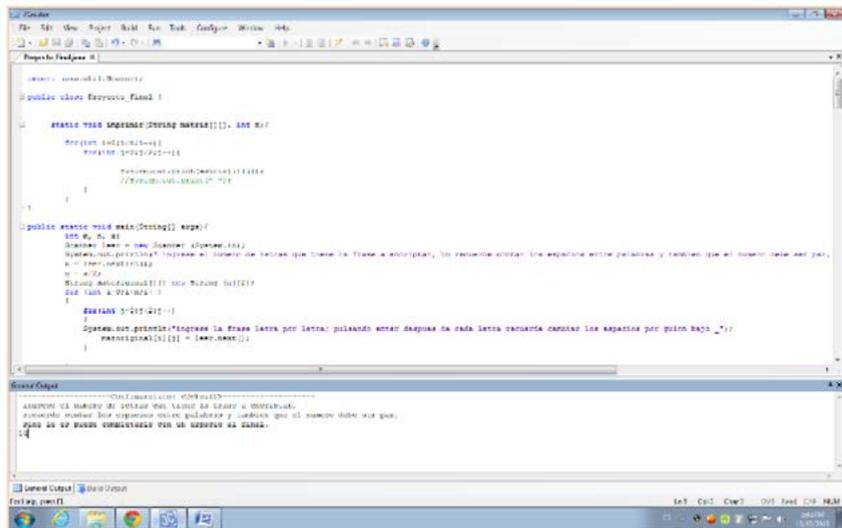


Imagen 2: Pantalla que muestra ejecución del programa de criptografía  
Fuente: Tomada por el autor.

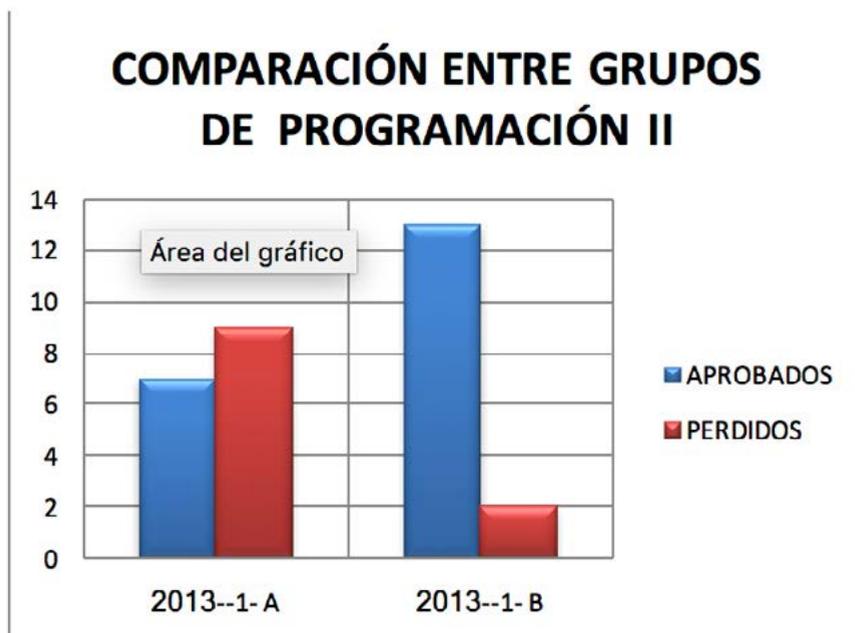


Gráfico 3: estadísticas de resultados académicos, comparación entre el grupo que llevo a cabo el proyecto de aula y otro que no lo implemento.  
Fuente: Elaborado por el autor.

## Referencias Bibliográficas

Bishop, A. (1999). Enculturación Matemática. La matemática desde una perspectiva cultural. Barcelona: Ediciones Paidós Ibérica.

# APLICACIÓN DEL FILTRO DE KALMAN EN MOVIMIENTO PARABOLICO

---

**Selene Coelho Loibel\***  
**Martha P. Olaciregui L.\*\***  
**Ilma Bonilla\*\*\***

---

\* Estadística por la Universidade Federal de Sao Carlos, Doctora en Ingeniería Univerdade de Campinas, Profesora tiempo completo Unesp Capus de Rio Claro, Brasil. sloibel@rc.unesp.br

\*\* Ingeniera de Sistemas, Especialista en Diseño y Construcción de Soluciones Telemáticas, Magister en Magister en Dirección Estratégica en Tecnologías de la Información en empresas de Software, Profesora tiempo completo Corporación Universitaria Americana, Colombia, molaciregui@coruniamericana.edu.co.

\*\*\* Ingeniero de Sistemas, Especialista en Informática Educativa, Magister en Informática Educativa, Profesora tiempo completo Corporación Universitaria Americana, Colombia, ibonilla@coruniamericana.edu.co.

## Resumen

El proceso de predecir con mayor precisión un fenómeno físico comienza por lo general con la recolección de los datos, a partir de estos se intenta modelar matemáticamente la situación, sin embargo, durante ese proceso es posible que se presenten errores de diversa índole que inciden en los resultados y que conllevan a la disminución de poder predictivo del modelo matemático que modela la experiencia.

Es en este contexto que desde el álgebra lineal se presenta el método de aproximación por mínimos cuadrados cuyo objetivo consiste en una curva que mejor represente los datos de mediciones y así aumentar la eficacia de los modelos matemáticos. Sin embargo, en el método no se toma en cuenta la existencia del ruido blanco.

Es así que en 1960, Kalman presenta un conjunto de ecuaciones que toma como base el método de aproximación por mínimo cuadrados aportando una nueva forma de expresar los modelos en la que incluye las incertezas producto del ruido blanco, esto constituye la base de lo que se ha denominado el filtro de Kalman.

En el presente artículo se muestra una aplicación del filtro de Kalman a una experiencia de laboratorio de física en el caso del movimiento parabólico.

**Palabras claves:** Filtro de Kalman; filtrado de señales; movimiento parabólico.

## Introducción

En palabra de Solera (2003):

La importancia de estudiar el algoritmo de Kalman radica en que se constituye en el principal método para estimar los estados de los sistemas dinámicos representados en forma de espacio de estados (State-Space), y que tiene muchas aplicaciones”. El filtro tiene su origen en el artículo de Kalman (1960) y describe una solución recursiva para el problema de filtraje lineal de datos discretos. La derivación de Kalman estaba dentro de un contexto más amplio de modelos de espacio de estados, donde el énfasis es el estimador por mínimos cuadrados recursivos. El filtro de Kalman (FK) ha tenido un gran progreso en parte debido a los avances tecnológicos en la computación digital y ha sido objeto de amplias investigaciones y aplicaciones, en particular en el área de navegación autónoma y asistida en misiles de rastreo, en economía, entre otras.

La notación de espacio de estados es esencialmente una forma conveniente para la estimación de modelos estocásticos donde los errores son asumidos en la medición del sistema, permitiendo lidiar con una vasta gama de modelos. Aplicaciones particulares usan componentes y parámetros que cambian en el tiempo y no son observables. Las aplicaciones de desarrollo y principios del FK ocurrieron durante la guerra fría entre la Unión Soviética y el bloque conformado por la Organización del Tratado del Atlántico Norte y los Estados Unidos de América, debido a que en los años de la década de 1950 los soviéticos lanzaron el primer satélite artificial y el primer vuelo espacial tripulado. Este hecho condujo a un aumento en la inversión en el área aeroespacial en los Estados Unidos. Como consecuencia se dieron los progresos para llevar al hombre a luna, es en este contexto donde se presentaron problemas con los datos provenientes de diferentes cálculos de trayectorias de vuelos. En los años de 1960 Kalman fue invitado como orador para explicar su algoritmo a los ingenieros de la NASA que trabajaban en el proyecto llamado Apollo11. El uso del FK fue una herramienta determinante en el éxito de la misión en 1969 (Grewal & Andrews, 2000).

En años recientes, en México fue usado para la previsión del clima en tiempo real. El problema que motivo la aplicación del FK es que el país está clasificado como uno de los 30 países del mundo más expuestos a tres o más tipos de riesgos naturales especialmente por el aumento de los niveles de

lluvia que inciden proporcionalmente en la hidrografía. El objetivo consistió en aplicar el FK para determinar una alerta contra eventos climáticos extremos conectados con la variabilidad climática, obteniendo como resultados un sistema altamente confiable en la previsión de ciertos eventos con un error mínimo (Indoval, 2010).

En Colombia, fue usado en la previsión de la temperatura de varias ciudades, estas eran tomadas en una base climática durante los meses de mayo a octubre. Al aplicar el FK se consiguió aumentar la confiabilidad de la previsión de la temperatura (Dorado, 2012). En Portugal fue usado para realizar un estudio comparativo entre las observaciones de la temperatura del aire a 2 metros en cuatro estaciones sinópticas portuguesas y sus respectivas previsiones hechas por el modelo de previsión numérica del tiempo del European Centre for Medium-Range Weather Forecasts (ECMWF). Se mostró que existen errores sistemáticos en las previsiones del modelo, que varían conforme la hora del día, la estación del año y de local a local.

De esta forma, fue desarrollado un FK para corregir las previsiones hechas por el modelo del centro europeo para las ciudades de Lisboa, Porto, Coimbra y Guarda. Entre las ventajas del FK cuando es comparado con otras técnicas estadísticas, está el hecho que este puede actualizar recursivamente los parámetros, permitiendo adaptarse a las alteraciones hechas en el modelo de previsión numérica de tiempo y también a diferentes situaciones meteorológicas que pueden variar significativamente a largo del año (Libonati, 2004).

En Argentina se implementó el FK para suavizar las trayectorias de geolocalización, consiguiendo reducir el error en las medidas hechas con dispositivos móviles (Bianco, 2013). En este sentido el primer Sistema de Posicionamiento Global (GPS), fue puesto en servicio en 1993 por el Departamento de Defensa de los Estados Unidos de América. El filtraje de Kalman desempeña un papel crítico en el desarrollo del GPS, lo que ha sido descrito como "un enorme FK". Este FK tiene un vector de estado del sistema general, incluyendo las trayectorias de los 24 satélites, las velocidades de deriva y fases de todo el sistema de relojes y centenas de parámetros relacionados las variables atmosféricas y el atraso de propagación, como una función del tiempo y de localización. El GPS utiliza receptores de precisión en todo el mundo como sensores para estimar esas variables.

Así mismo, cada receptor usa un FK para estimar su propia posición, y velocidad y para sincronizar el reloj del receptor con el tiempo del GPS (Grewal & Andrews, 2000).

En Brasil, fue usado en la estimación de tiempos de llegada de buses urbanos considerando que esta predicción depende de una serie de factores, por ejemplo, atrasos en semáforos, número de pasajeros en puntos de parada, etc. Estos factores aumentan significativamente el nivel de las incertezas asociadas al proceso y la medición. Con la implementación los resultados fueron satisfactorios en lo referente a la predicción de los tiempos de llegada, obteniendo un error porcentual medio menor del 3% (Gurgel, 2005).

En el presente trabajo se mostrará la aplicación del FK a un conjunto de datos obtenidos durante una experiencia de laboratorio de física mecánica, los cuales luego de ser analizados mostraron un error en las posiciones descritas por las imágenes de la cámara que grabó el experimento. Con el objetivo de presentar una aplicación práctica de este método en experiencias de laboratorio.

## **Materiales y métodos.**

### Consideraciones importantes sobre el Filtro de Kalman

El FK puede usarse para tanto para filtraje de señales, entendiendo esta como los resultados obtenidos a partir de la aplicación de un modelo, o para predecir futuros estados del sistema establecido. Los sistemas que se consideran para la aplicación del filtro de Kalman son los sistemas dinámicos estocásticos, los mismos pueden ser de tiempo discreto o de tiempo continuo.

En este artículo se tratará el caso del FK para tiempo discreto, para el caso de filtraje.

Para lo cual se considerará la ecuación de estado y de salida de un sistema no estacionario con ruido modelado así:

$$\begin{aligned}x(k+1) &= A(k)x(k) + B(k)u(k) + v(k) \\ y(k) &= C(k)x(k) + w(k)\end{aligned}$$

Donde A, B y C son matrices de variable real y que por lo general son determinísticas, que representan modelos lineales que varían con el tiempo,  $v(k)$  y  $w(k)$  son los procesos estocásticos de los ruidos blancos de media cero, además de eso independientes, lo cual conlleva a las siguientes derivaciones:

$$\begin{aligned}
 E\{v(k)\} &= E\{w(k)\} = 0 \\
 E\{v(k)w^T(k)\} &= E\{w(k)v^T(k)\} = 0 \\
 E\{v(k)v^T(k)\} &= Q(k) \\
 E\{v(k)v^T(j)\} &= 0 \quad \forall k \neq j \\
 E\{w(k)w^T(k)\} &= R(k) \\
 E\{w(k)w^T(j)\} &= 0 \quad \forall k \neq j
 \end{aligned}$$

Lo que genera que existan las matrices de covariancia que se llaman  $Q(k)$  y  $R(k)$  que son diagonales.

Para el caso que se presenta en el presente trabajo se hará un filtrado de los resultados, lo cual se obtiene estimando  $\hat{x}(k)$  conociendo las medidas  $y(0)$ ,  $y(1)$ , ...,  $y(k)$ .

Los resultados que resultan del proceso anterior de filtraje producen un alisamiento del sistema, a partir de la estimación  $\hat{x}(k)$  ( $k-1$ ) conociendo las medidas  $y(0)$ ,  $y(1)$ , ...,  $y(k)$  (Indoval, 2010).

Los pasos para la implementación del FK pueden resumirse de la siguiente manera:

1. Comprender la situación: Mirar el problema. Abordarlo desde el punto de vista de sus bases matemáticas. Esto es, establecer el modelo matemático que mejor describe la situación.
2. Modelo del proceso de estado: Se comienza con un modelo básico. Puede que no funcione eficazmente en un principio, pero esto se puede refinar más tarde.
3. Modelo del proceso de medición: Analizar cómo se mide el proceso. El espacio de la medida puede no estar en el mismo espacio que el estado.

4. Modelo del ruido: El filtro de Kalman base supone ruido (blanco) de Gauss, así que la varianza y covarianza (error) significativa (es decir, asegurarse de que el modelo del error es adecuado para la situación).
5. Prueba del filtro: A menudo se pasa por alto, el uso de datos sintéticos si es necesario. A ver si el filtro se comporta como debería.
6. Afinar filtro: Trate de cambiar los parámetros de ruido (filtro), como este es el más fácil de cambiar. Si es necesario ir más atrás, puede que tenga que replantearse la situación.

## 2.2 Aplicación

Fue grabado un video de la trayectoria de una esfera de cerca de 4 cm de diámetro lanzada manualmente con un cierto ángulo, de modo que la trayectoria se comporte como un movimiento parabólico. Para registrar el experimento fue utilizada una camera digital capaz de capturar imágenes con 1920x1080 pixeles de resolución y 30 cuadros por segundo, enfocada hacia un fondo de color claro de tal forma que capturara la imagen de la esfera cuando está ya estaba en movimiento. El movimiento de la esfera fue modelado usando ecuaciones de la cinemática que relacionan posición, velocidad, aceleración y tiempo. El modelaje se hace más simple analizando el movimiento de proyectiles separadamente en dos ejes,  $s$  y  $h$ , conforme a la Figura 1. Cabe notar que esas ecuaciones son válidas se despreciamos el efecto del aire y consideramos la esfera como un objeto puntual, lo cual permite desarrollar un buen modelo para el propósito de este trabajo.

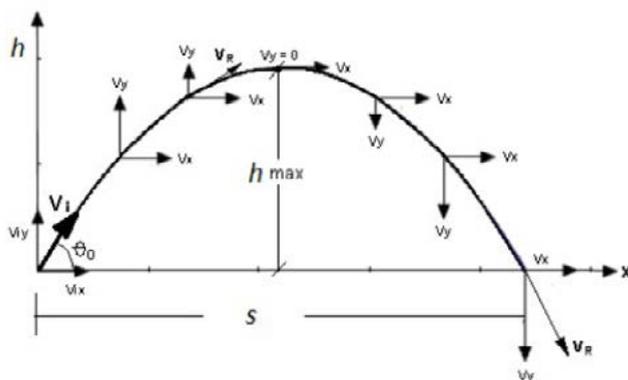


Figura 1. *Movimiento parabólico.*  
Fuente: *Elaborado por el autor.v*

Las ecuaciones de posición y velocidad son las siguientes:

$$\begin{aligned} s(t) &= s_0 + V_{0s}t \\ V_x(t) &= V_{0x} \\ h(t) &= h_0 + V_{0h}t - \frac{1}{2}gt^2 \\ V_t(t) &= V_{0h} - gt \end{aligned}$$

Donde  $s(t)$  es la posición en el eje horizontal en el instante  $t$ ,  $h(t)$  es la posición en el eje vertical en el instante  $t$ ,  $s_0$  es la posición inicial en el eje  $s$ ,  $h_0$  es la posición en el eje  $h$ ,  $V_{0s}$  es la velocidad inicial en el eje  $s$ ,  $V_{0h}$  es la velocidad inicial en el eje  $h$  y  $g$  es la aceleración debida a la fuerza de gravedad.

Luego considerando el caso discreto para el Filtro de Kalman, las ecuaciones anteriores pueden escribirse como:

$$\begin{aligned} s(t) &= s(t-1) + V_{0s}(t-1)\Delta t \\ V_x(t) &= V_x(t-1) \\ h(t) &= h(t-1) + V_h(t-1)\Delta t - \frac{1}{2}g\Delta t^2 \\ V_t(t) &= V_h(t-1) - g\Delta t \end{aligned}$$

Lo cual puede ser escrito en forma matricial de la siguiente manera:

$$\begin{bmatrix} s(t) \\ V_s(t) \\ h(t) \\ V_h(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s(t-1) & V_s(t-1)\Delta t & & \\ & V_s(t-1) & & \\ & & h(t-1) & V_h(t-1)\Delta t \\ & & & V_h(t-1) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -\frac{1}{2}g\Delta t^2 \\ -g\Delta t \end{bmatrix}$$

Adecuando la ecuación matricial anterior al modelo de espacio de estados dados por la ecuación:

$$\begin{cases} x(k+1) = Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) = Cx(t) \end{cases}$$

Obtenemos los siguientes vectores:

Vector de estados:

$$x(t) = \begin{bmatrix} s(t) \\ V_s(t) \\ h(t) \\ V_h(t) \end{bmatrix}$$

**Matriz A:**

$$A = \begin{bmatrix} 1 & \Delta t & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \Delta t \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

**Matriz B:**

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

**Matriz C:**

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

**Vector de entradas:**

$$u(t) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -\frac{1}{2}g\Delta t^2 \\ 1g\Delta t \end{bmatrix}$$

Las posiciones iniciales, posición y velocidad fueron obtenidas de los primeros cuadros del video de forma aproximada de tal forma que la matriz de covarianza del error de estimación P es escrita con los valores de su diagonal próximos a uno (1) tomando en consideración la buena estimativa inicial.

$$\hat{x}(0) = \begin{bmatrix} 50 \\ 1200 \\ 50 \\ 3000 \end{bmatrix}$$
$$P(0) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Además de lo anterior las matrices Q y R fueron escogidas respectivamente como:

$$Q(0) = \begin{bmatrix} 0.1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.1 \end{bmatrix}$$
$$R(0) = \begin{bmatrix} 0.5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.5 \end{bmatrix}$$

En el siguiente ítem del presente artículo se presentan los resultados obtenidos luego de llevar las anteriores ecuaciones matriciales al programa MatLab.

### 3. Resultados y discusiones

A continuación se presentan los resultados de la aplicación del FK para el caso del movimiento parabólico descrito en el ítem anterior.

Teniendo en cuenta las diferentes variaciones que deben hacerse en la matriz de covariancia de los errores, se fueron cambiando los valores de la diagonal de la matriz que es representada por R, es decir se hicieron iteraciones para 20, 7.5 y 3

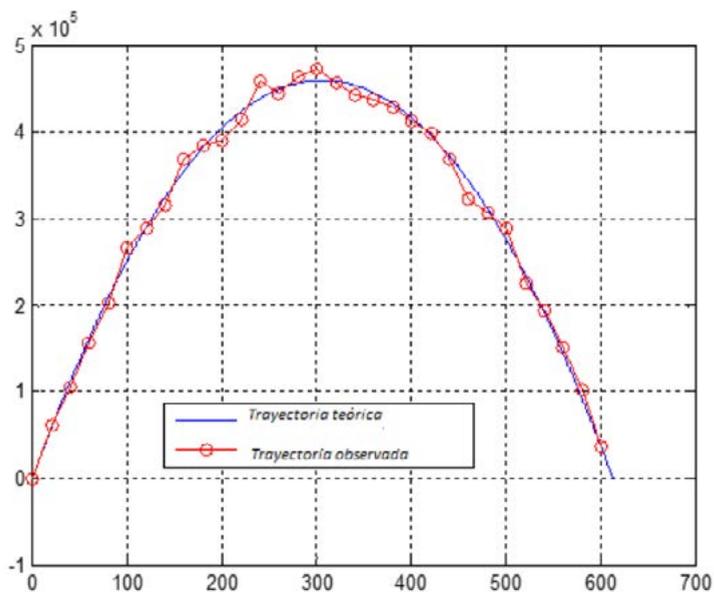


Figura 2. Trayectoria de la esfera.  
Fuente: Elaborado por el autor.

En la figura 2 se muestra las diferencias observadas entre el valor teórico de la posición de la esfera y las imágenes tomadas por la cámara digital, lo que muestra que en las mismas hubo un error en la medición.

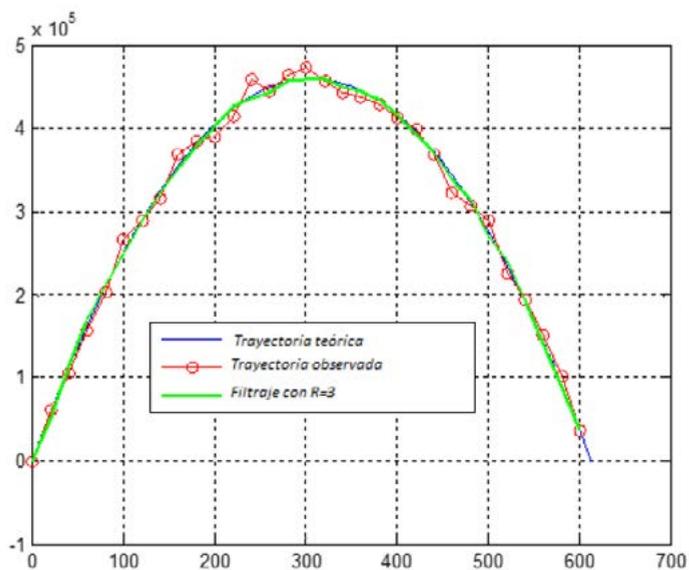


Figura 3. Filtraje con  $R=3$   
Fuente: Elaborado por el autor.

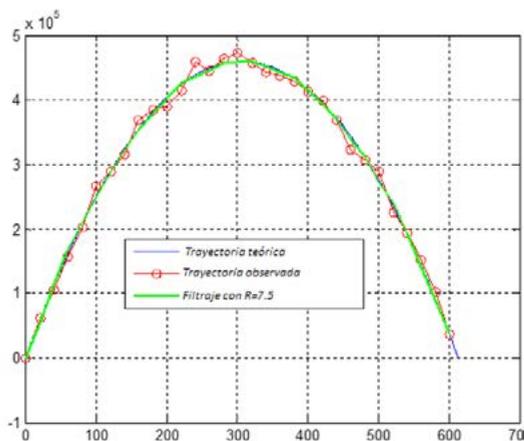


Figura 4. *Filtraje con  $R=7.5$*   
Fuente: *Elaborado por el autor.*

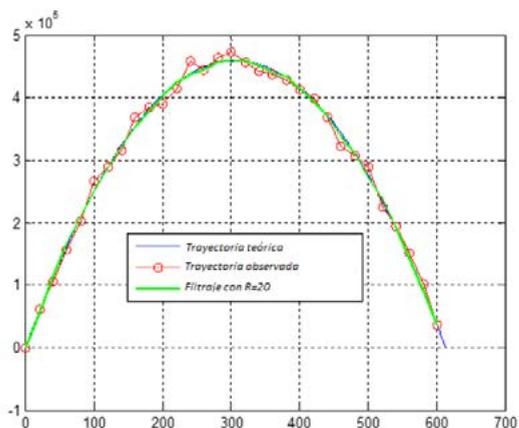


Figura 5. *Filtraje con  $R=20$*   
Fuente: *Elaborado por el autor.*

En las Figuras 4 y 5 se muestra como la variación del error en la matriz  $R$ , conlleva a la reducción de la covarianza de los errores en la medición tomada por la cámara digital. La mayor aproximación al valor teórico se dio cuando se hizo  $R=20$ , lo que permite inferir que la varianza del error estuvo cerca del 20%.

#### **4. Conclusión**

La principal conclusión al respecto de la aplicación del FK en este trabajo es que el mismo muestra su eficacia en la corrección de errores provenientes de diversas fuentes y que siempre generan una diferencia significativa con la realidad.

Además de lo anterior, también cabe mencionar que ningún sistema dinámico es 100% determinístico, ya que, de alguna forma, los sistemas dinámicos siempre están sujetos a variaciones muchas veces imperceptibles, pero que afectan los resultados de experimentos.

## Referencias Bibliográficas

- Bianco, J. (2013). Estudio y aplicación de Filtros de Kalman sobre sistemas de posicionamiento global para el suavizado de trayectorias geoposicionadas. Tesis (Doctorado) Universidad Nacional de Cordoba.
- Dorado, R. (2012). Implementación de filtros de kalman como método de ajuste a los modelos de pronóstico (gfs) de temperaturas máximas y mínima para algunas ciudades de Colombia. IDEAM. 8, 1-17.
- Grewal, M. S. & Andrews, A. P. Applications of kalman filtering in aerospace 1960 to the present. IEEE Control Systems Magazine, 10. p. 69-78.
- Gurgel, F. S. (2005). Estimación de tempos de chegada de ônibus urbano utilizando filtros de Kalman. Tesis (Doctorado). Universidade Federal de Santa Catarina.
- Indoval, R. P. (2010). Pronóstico en tiempo real para determinar una alerta contra fenómenos hidrometeorológicos extremos ante la variabilidad climática por medio de: Filtro de kalman discreto. Int. J. General Systems, 17, p. 95-105.
- Kalman, R. E. (1960). A new approach to linear filtering and prediction problems. Journal of basics engineering. 82, 35-45.
- Libonati, I. T. (2004). Aplicação do filtro de kalman na correlação das previsões de temperatura a 2 metros do ecmwf. Anais CBMET, 8. 338-353.
- Solera Ramírez, A. (2003). El Filtro De Kalman. Banco Central De Costa Rica, San José de Costa Rica, 1 Edición.

# **UN MODELO BASADO EN SISTEMAS DINÁMICOS ESTOCÁSTICOS PARA LA PROYECCIÓN DE LOS RESULTADOS DE SABER PRO**

---

**José Solorzano Movilla\***

**Diana Suárez\*\***

**Clara Colón\*\*\***

---

\* Magister en Matemáticas por la Unesp campus Rio Claro-Brasil, Profesor tiempo completo Corporación Universitaria Americana, Colombia, jsolorzano@coruniamericana.edu.co

\*\* Ingeniera de Sistemas, Especialista en Ingeniería de Software, Magister en Administración de Empresas e Innovación, Profesora tiempo completo Corporación Universitaria Americana, Colombia, dsuarez@coruniamericana.edu.co.

\*\*\* Ingeniera de Sistemas, Magister en Educación, Profesora tiempo completo Corporación Universitaria Americana, Colombia, ccolon@coruniamericana.edu.co.

## Resumen

La prueba Saber Pro es implementada en Colombia como una forma externa de medir la calidad de la educación superior. Sustentada en la ley 1324 de 2009, es realizada por los estudiantes de último año de los programas profesionales, tecnológicos y técnicos además es un requisito para acceder al respectivo título académico

De acuerdo con lo anterior, el Instituto Colombiano de Fomento a la Educación Superior establece que “El Examen de Estado de Calidad de la Educación Superior, Saber Pro, hace parte del conjunto de instrumentos estandarizados por el Ministerio de Educación Nacional para la evaluación de la calidad de la educación superior y determina las competencias genéricas necesarias para un adecuado desempeño y las competencias específicas de los estudiantes que están próximos a culminar sus estudios” (ICFES, 2017). Los componentes que se evalúan en la mencionada prueba son los de razonamiento cuantitativo, comunicación escrita, lectura crítica, inglés y competencias ciudadanas.

En ese sentido, las instituciones de educación superior (IES) muestran un especial interés en mejorar los resultados que los estudiantes obtienen en las pruebas Saber Pro, ya que estos se interpretan como un indicador de la calidad de los egresados de las diferentes ofertas académicas.

En el siguiente trabajo se presenta una forma de estimación de los resultados que un programa puede obtener, con base en la aplicación del filtro de Kalman (FK), el cual predice un estado de un sistema a partir del estado presente y el inmediatamente anterior.

**Palabras clave:** Estimación estocástica, filtro de Kalman, Saber Pro, calidad académica.

## **Introducción**

Las IES en Colombia se encuentran en la obligación de inscribir a sus estudiantes de último año en la presentación de la prueba Saber Pro. Los resultados de esta constituyen uno de los indicadores para determinar la calidad de la educación que vienen impartiendo.

Hay que mencionar además, que los resultados individuales son contrastados con los promedios nacionales y un grupo de referencia. La media nacional considera los puntajes de todos los estudiantes sin distinción del programa al cual pertenecen. En cambio, el grupo de referencia toma en cuenta todos aquellos programas similares y los que le son afines, por ejemplo, el grupo de referencia de administración de empresas y afines incluye además de administración, contaduría, negocios internacionales.

Consecuentemente, se considera que el programa obtiene buenos resultados cuando el promedio de los resultados obtenidos están iguales o mayores a la media nacional o sobre el promedio del grupo de referencia en el cual se asignó el programa académico, aunque en los informes de resultados por IES el Instituto Colombiano de Fomento a la Educación Superior (ICFES) se dan mucha información que da cuenta de cómo está el programa en cada uno de los núcleos de competencias evaluadas, se le da mayor relevancia a la distancia de la media nacional o del grupo de referencia.

Por otro lado, luego de que el ICFES libera los resultados las IES realizan los respectivos análisis de los mismo para poder realizar cambios y mejoras en los programas académicos, sin embargo, hasta el momento no existe una herramienta estadística que pueda prever como serán los resultados de cada uno de los programas que se presentan a la prueba Saber Pro. Frecuentemente, las IES realizan simulacros para tener una aproximación a los resultados que los estudiantes pueden obtener. Sin embargo, esto no coincide muchas veces con los resultados que son entregados por el ICFES.

En consecuencia, el FK se presenta como un método robusto que permitirá estimar los resultados que un programa académico puede obtener en las pruebas Saber Pro. Esto puede ser una herramienta útil, ya que con base en los resultados es posible crear sistemas de alerta temprana y a la vez conocer que puntaje deben obtener los estudiantes de manera progresiva para que la media del programa académico este por encima de la media nacional o del grupo de referencia.

## 2. METODOLOGIA

El trabajo se dividió en cuatro etapas; la primera, búsqueda de los resultados históricos de los diferentes programas académicos de la Corporación Universitaria Americana, la segunda, un trabajo de laboratorio, en el cual se ajustó el método del filtro de Kalman a las necesidades, en tercer lugar, pruebas, en las que hicieron estimaciones de resultados y se compararon los ya obtenidos, y la cuarta etapa, de ajuste del modelo obtenido a partir de la implementación del FK.

### 2.1. Resultados Históricos

En esta etapa se van a analizar los resultados obtenidos en el componente de competencias genéricas de un por un programa de la Corporación Universitaria Americana, desde el año 2011 hasta el 2014. Con estos datos, que a partir de aquí denominaremos datos de prueba y con los elementos conceptuales del filtro de Kalman se diseñara un modelo de estimación para cada una de las pruebas genéricas que se evalúan por parte del ICFES.



Gráfico 1. *Competencias genéricas 2011-2.*  
Fuente: *Elaboración propia.*

En el gráfico 1, se muestran los primeros resultados obtenidos por el programa, aquí cabe considerar que fueron los primeros estudiantes de la Institución que presentaron las pruebas Saber Pro. Es posible notar que la en tres de los cuatro núcleos de competencias se alcanzó un puntaje similar a la media nacional.



Gráfico 2. *Competencias genéricas 2012-1.*  
Fuente: *Elaboración propia.*

En el gráfico 2, se puede evidenciar que la tendencia se mantiene, en lo que refiere a que los resultados obtenidos están cercanos a la media nacional.



Gráfico 3. *Competencias genéricas 2012-2.*  
Fuente: *Elaboración propia.*

En el gráfico 3, se evidencia que los resultados cortaron la tendencia, los resultados que igualaron la media nacional fueron los de razonamiento cuantitativo, de igual forma se nota que en escritura el puntaje estuvo por debajo de los promedios de años anteriores.



Gráfico 4. *Competencias genéricas 2013-1.*  
Fuente: *Elaboración propia.*

En el gráfico 4, se comienza a marcar una nueva tendencia y es la estar por debajo de la media nacional y más distante en lo referente a la media del grupo de referencia en todos los núcleos de competencias evaluados.



Gráfico 5. *Competencias genéricas 2013-3.*  
Fuente: *Elaboración propia.*

En el gráfico 5, se muestra un comportamiento similar a lo destacado en los gráficos 3 y 4. La tendencia se mantiene en estar por debajo de la media nacional.



Gráfico 6. *Competencias genéricas 2014-1.*  
Fuente: *Elaboración propia.*

La tendencia de estar por debajo de la media nacional tiene un cambio en el año 2014, los resultados del primer semestre de ese año estuvieron cercanos a lo obtenido en promedio por todos los estudiantes que presentaron la prueba como se muestra en el gráfico 6.



Gráfico 7. *Competencias genéricas 2014-2.*  
Fuente: *Elaboración propia.*

De acuerdo con el gráfico 7, la tendencia identificada en los gráficos 3,4 y 5 se mantiene, los resultados obtenidos por los estudiantes continúan estando por debajo de la media nacional en la mayoría de las competencias evaluadas. De igual forma, la distancia es mayor respecto al promedio del grupo de referencia.

## 2.2. Pruebas

El FK puede usarse para tanto para filtrado de señales, entendiendo esta como los resultados obtenidos a partir de la aplicación de un modelo, como para predecir futuros estados del sistema establecido. “Los sistemas que se consideran para la aplicación del filtro de Kalman son los sistemas dinámicos estocásticos, los mismos pueden ser de tiempo discreto o de tiempo continuo” (Solorzano, 2016).

En este artículo se tratará el caso del FK para tiempo discreto, para el caso de predicción de estados futuros.

Para lo cual se considerará la ecuación de estado y de salida de un sistema no estacionario con ruido modelado así:

$$x(k+1)=A(k)x(k)+B(k)u(k)+v(k)$$

$$y(k)=C(k)x(k)+w(k)$$

Donde A, B y C son matrices de variable real y que por lo general son determinísticas, que representan modelos lineales que varían con el tiempo,  $v(k)$  y  $w(k)$  son los procesos estocásticos de los ruidos blancos de media cero, además de eso independientes, lo cual conlleva a las siguientes derivaciones:

$$E\{v(k)\}=E\{w(k)\}=0$$

$$E\{v(k) w^{\wedge T}(k)\}=E\{w(k) v^{\wedge T}(k)\}=0$$

$$E\{v(k) v^{\wedge T}(k)\}=Q(k)$$

$$E\{v(k) v^{\wedge T}(j)\}=0 \quad \forall k \neq j$$

$$E\{w(k) w^{\wedge T}(k)\}=R(k)$$

$$E\{w(k) w^{\wedge T}(j)\}=0 \quad \forall k \neq j$$

Lo que genera que existan las matrices de covarianza que se llamarán  $Q(k)$  y  $R(k)$  y que son diagonales.

Para el caso que se presenta en el presente trabajo se hará un filtrado de los resultados, lo cual se obtiene estimando  $\hat{x}(k)$  conociendo las medidas  $y(0)$ ,  $y(1)$ , ...,  $y(k)$ .

Los resultados que arroja el proceso anterior de filtraje produce un alisamiento del sistema, a partir de la estimación  $\hat{x}^{(k-1)}$  conociendo las medidas  $y(0), y(1), \dots, y(k)$  (Indoval, 2010).

Los pasos para la implementación del FK pueden resumirse de la siguiente manera:

1. Comprender la situación: Mirar el problema. Abordarlo desde el punto de vista de sus bases matemáticas. Esto es, establecer el modelo matemático que mejor describe la situación.
2. Modelo del proceso de estado: Se comienza con un modelo básico. Puede que no funcione eficazmente en un principio, pero esto se puede refinar más tarde.
3. Modelo del proceso de medición: Analizar cómo se mide el proceso. El espacio de la medida puede no estar en el mismo espacio que el estado.
4. Modelo del ruido: El filtro de Kalman base supone ruido (blanco) de Gauss, así que la varianza y covarianza (error) significativa (es decir, asegurarse de que el modelo del error es adecuado para la situación).
5. Prueba del filtro: A menudo se pasa por alto, el uso de datos sintéticos si es necesario. A ver si el filtro se comporta como debería.
6. Afinar filtro: Cambiar los parámetros de ruido (filtro), como este es el más fácil de cambiar. Si es necesario ir más atrás, puede que tenga que replantearse la situación.

De acuerdo a lo descrito en párrafos anteriores, la forma que toma el filtro de Kalman para el caso unidimensional es el siguiente:

$$Est_t = Est_{t-1} + KG[MED. - Est_{t-1}]$$

Dónde:

$Est_t$  Representa el estado en el tiempo t, en este caso, el valor que se desea estimar en la prueba genérica de Saber Pro. 3.

$Est_{t-1}$  Considera los valores del estado en el tiempo anterior, es decir, el puntaje obtenido en la prueba en el semestre anterior.

$MED$ . Medidas, en este caso se tomará la media nacional en el componente a estimar, de la Prueba Saber Pro.

$E_{Est}$  Error en la estimación.

$E_{MED}$ . Error en las medidas, para este caso se tomara como la varianza.

$KG$  Es el valor del vector de ganancia de Kalman, definido como

$$\frac{E_{Est}}{Est_t + E_{MED}}$$

## RESULTADOS

Con un error en la estimación de uno, se pudieron calcular los siguientes valores para las estimaciones promedios para el programa académico del ítem 2.1. y siguiendo todos los pasos descritos en la etapa de laboratorio 2.2. Se llevaron a cabo las pruebas y ajustes de la estimación para las pruebas genéricas de Saber Pro.

En ese sentido, siendo el filtro de Kalman un método iterativo se hace necesario comenzar con unos valores iniciales, aquí serán los correspondientes a los valores de la media nacional en el periodo anterior a la primera vez que el programa presentó estudiantes a las Pruebas Saber Pro.

*Tabla 1.*  
Periodo 2011-2.

Periodo 2011-2	Resultado Promedio	Desviación Típica
Prueba genérica		
Razonamiento cuantitativo	10,14	1,15
Escritura	9,51	0,96
Inglés	9,99	0,91
Lectura crítica	9,99	0,94

*Fuente:* Elaboración propia.

Con estos, valores iniciales para la primera presentación de la Prueba se estimaron los resultados para las pruebas de los periodos 2012-1, 2012-1,

2013-1, 2013-3, 2014-1 y 2014-1. Lo calculado se muestra en las tablas 2 a la 7, presentadas a continuación.

*Tabla 2.*

Periodo 2012-1.

Periodo 2012-1		
Prueba genérica	Resultado Obtenido	Estimación
Razonamiento cuantitativo	10,7	10,46
Escritura	9,9	9,69
Inglés	10,18	10,11
Lectura crítica	9,97	9,89
Competencias Ciudadanas	9,97	4,75

*Fuente:* Elaboración propia.

En la tabla 2, se presentan la comparación entre las estimaciones realizados mediante la aplicación del FK y los resultados obtenidos en las pruebas Saber Pro del periodo 2012-1. Los resultados estuvieron bastantes próximos a las estimaciones, en especial para razonamiento cuantitativo, comunicación escrita y lectura crítica y distantes para competencias ciudadanas.

*Tabla 3.*

Periodo 2012-2.

Periodo 2012-2		
Prueba genérica	Resultado Obtenido	Estimación
Razonamiento cuantitativo	10	10,29
Escritura	8,6	9,34
Inglés	10	10,07
Lectura crítica	9,6	9,77
Competencias Ciudadanas	9,6	9,77

*Fuente:* Elaboración propia.

En la tabla 3, se presentan la comparación entre las estimaciones realizados mediante la aplicación del FK y los resultados obtenidos en las pruebas Saber Pro del periodo 2012-2. Los resultados, estuvieron próximos a las estimaciones, en especial para razonamiento inglés, lectura crítica y competencias ciudadanas.

*Tabla 4.*

Periodo 2013-1.

Periodo 2013-1		
Prueba genérica	Resultado Obtenido	Estimación
Razonamiento cuantitativo	9,9	9,9
Escritura	9,34	9,05
Inglés	9,87	9,94
Lectura crítica	9,71	9,66
Competencias Ciudadanas	9,16	9,37

*Fuente:* Elaboración propia.

En la tabla 4, se presentan la comparación entre las estimaciones realizados mediante la aplicación del FK y los resultados obtenidos en las pruebas Saber Pro del periodo 2013-1. Los resultados, en esta ocasión estuvieron por encima de las estimaciones para las componentes de comunicación escrita, lectura crítica y en el caso de razonamiento cuantitativo el resultado coincidió con lo estimado.

*Tabla 5.*

Periodo 2013-3.

Periodo 2013-3		
Prueba genérica	Resultado Obtenido	Estimación
Razonamiento cuantitativo	9,67	9,79
Escritura	9,64	9,51
Inglés	9,87	9,87
Lectura crítica	9,67	9,69
Competencias Ciudadanas	9,86	9,52

*Fuente:* Elaboración propia.

En la tabla 5, se presentan la comparación entre las estimaciones realizados mediante la aplicación del FK y los resultados obtenidos en las pruebas Saber Pro del periodo 2013-3. Los resultados, en esta ocasión estuvieron por encima de las estimaciones para las componentes de competencias ciudadanas y comunicación escrita y en el caso de inglés el resultado coincidió con lo estimado.

*Tabla 6.*  
Periodo 2014-1.

Periodo 2014-1		
Prueba genérica	Resultado Obtenido	Estimación
Razonamiento cuantitativo	10,3	9,98
Escritura	9,74	9,7
Ingles	10,4	10,12
Lectura crítica	9,5	9,58
Competencias Ciudadanas	N/A	

*Fuente:* Elaboración propia.

En la tabla 6, se presentan la comparación entre las estimaciones realizados mediante la aplicación del FK y los resultados obtenidos en las pruebas Saber Pro del periodo 2014-1. Los componentes de inglés y razonamiento cuantitativo estuvieron por encima de lo estimado, para el resto de las pruebas existió una alta aproximación. Cabe destacar que este periodo no se evaluó las competencias ciudadanas.

*Tabla 7.*  
Periodo 2014-2.

Periodo 2014-2		
Prueba genérica	Resultado Obtenido	Estimación
Razonamiento cuantitativo	10	10,15
Escritura	9,23	9,45
Ingles	10,1	10,26
Lectura crítica	9,7	9,6
Competencias Ciudadanas	N/A	

*Fuente:* Elaboración propia.

En la tabla 7, se presentan la comparación entre las estimaciones realizados mediante la aplicación del FK y los resultados obtenidos en las pruebas Saber Pro del periodo 2014-2. Todos los componentes estuvieron próximos a las estimaciones. Cabe destacar que este periodo no se evaluó las competencias ciudadanas al igual que en 2012-1.

#### **4. CONCLUSIONES**

Luego del análisis de los resultados es posible hacer conclusiones respecto a dos aspectos, el primero la eficacia del método y en el segundo sobre el rendimiento del programa del cual se originan los datos utilizados.

En consonancia, el método del FK para la estimación de estados se presenta con alto grado de eficacia, el cual depende de los valores que tome el vector de ganancia de Kalman, el cual es en realidad un corrector que permite actualizar los valores a partir del estado inmediatamente anterior.

En el caso que se trató en el artículo, se pudo mostrar como el uso del FK se convierte en una herramienta útil para el mejoramiento de los resultados ya que con el mismo se puede diseñar un sistema de alerta para evitar en cierta medida alejarse de la media nacional o en use defecto determinar los puntajes promedios que deben ser obtenidos por los estudiantes para superar la media nacional.

Por otro lado, el rendimiento académico puede mejorar de igual forma a partir de las estimaciones que pueden impactar en la actualización de los contenidos y modelos pedagógicos que permitan potencializar las competencias en los estudiantes y de esta forma lograr resultados destacados a nivel regional y nacional en las pruebas Saber Pro.

## Referencias Bibliográficas

- ICFES. (2017). Guía de orientación Saber Pro Módulos de Competencias Genéricas. Recuperado de: <file:///C:/Users/Investigador/Downloads/Guia%20de%20orientacion%20modulos-de-competencias-genericas-saber-pro-2017.pdf>
- Indoval, R. P. (2010). Pronóstico en tiempo real para determinar una alerta contra fenómenos hidrometeorológicos extremos ante la variabilidad climática por medio de: Filtro de kalman discreto. *Int. J. General Systems*, 17, p. 95-105.
- Kalman, R. E. (1960). A new approach to linear filtering and prediction problems. *Journal of basics engineering*, 82, 35-45.
- Solorzano, J. (2016). Sistemas dinámicos y método del filtro de Kalman. Tesis de Maestría. Universidade Estadual Paulista Júlio de Mesquita Filho. Disponible en: [https://repositorio.unesp.br/bitstream/handle/11449/147133/movilla\\_jgs\\_me\\_rcla.pdf?sequence=3&isAllowed=y](https://repositorio.unesp.br/bitstream/handle/11449/147133/movilla_jgs_me_rcla.pdf?sequence=3&isAllowed=y)